CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU BÌNH TÂY

TS. NGUYỄN THÁI SƠN

HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO *fx-570VN PLUS*

DÀNH CHO CÁC LỚP 10-11-12

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH 2015

Lời nói đầu

Từ khi các thế hệ máy tính với chức năng giải được phương trình bậc 2, bậc 3 và các hệ phương trình ra đời, việc học tập và thi cử đã có những cải tiến đáng kể. Đến nay sự ra đời của máy tính CASIO 570VN Plus với nhiều tính năng vượt trội:

1. Đối với bậc THCS máy tính thực hiện các phép chia có dư, phân tích thành thừa số nguyên tố, tìm ƯCLN, BCNN.

2. Các phép tính số phức, dạng đại số và dạng lượng giác. Đặc biệt tính được lũy thừa bậc 4 trở lên cho số phức.

3. Lưu được các nghiệm của phương trình bậc 2, 3 và nghiệm x, y, z của một hệ (2 ẩn, 3 ẩn).

4. Giải được các bất phương trình bậc 2 và bậc 3, tính được giá trị lớn nhất/giá trị nhỏ nhất của một hàm số bậc hai.

5. Tạo bảng số từ 2 hàm trên cùng một màn hình tính toán

6. Các phép tính vectơ, định thức và ma trận, tính toán phân phối trong thống kê.

Rất nhiều tính năng khác mà dòng máy này đem lại như:

- Tính toán với các số thập phân vô hạn tuần hoàn giúp hiểu thêm về tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

- Lưu hai kết quả cuối cùng vào bộ nhớ thông qua phím Ans và ALPHA Ans **(PreAns)**.

Việc sử dụng máy tính thật cần thiết như thế, nhưng rất nhiều học sinh vẫn chưa khai thác hết các tính năng ưu việt của nó. Tập tài liệu này giúp cho các bạn đồng nghiệp nắm vững việc sử dụng máy tính trong giảng dạy và truyền đạt cho học sinh các kỹ năng này để các em làm tốt bài tập và bài thi của mình.

Quyển sách được viết trong một thời gian ngắn để kịp cho các khoá bồi dưỡng giáo viên. Các tài liệu tham khảo được liệt kê đầy đủ ở cuối sách. Đặc biệt trong quá trình biên soạn tài liệu, tôi tham khảo một phần của quyển sách

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG VÀ GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO FX-500MS

của nhóm tác giả NGUYỄN VĂN TRANG-NGUYỄN TRƯỜNG CHẤNG-NGUYỄN HỮU THẢO-NGUYỄN THẾ THẠCH. Trong quá trình giảng dạy, chúng tôi sẽ có những hiệu đính và cải tiến thích hợp.

Mọi ý kiến đóng góp gửi về email **nthaison@gmail.com**
hoặc email **vinh@bitex.com.vn**, điện thoại **08.3969 9999** (Ext: 005)

Thành phố Hồ Chí Minh ngày 26 tháng 5 năm 2015
TS Nguyễn Thái Sơn [1]

[1] Nguyên Trưởng Khoa Toán-Tin, Đại học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh (2000-2009)

BITEX

CÔNG TY CP XNK BÌNH TÂY

PHẦN I

CÁC TÍNH NĂNG VƯỢT TRỘI CỦA MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS

CHƯƠNG 1

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS TRONG CHƯƠNG TRÌNH LỚP 10

1.1 Mệnh đề - tập hợp

Ví dụ 1: Cho tập hợp số sau đây:

$$A = \left\{ \frac{n}{(n-1)^2} \middle| n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geqslant 3 \right\}$$

1. Tìm số hạng ứng với $n = 35$ của A.

2. Tìm tổng của 38 số hạng đầu tiên.

---

1. [X] [▭/▭] [(] [X] [−] [1] [)] [x^2] [CALC] [3] [5] [=] $\frac{35}{1156}$

2. [SHIFT] [log▭▭] (Σ▭) [X] [▭/▭] [(] [X] [−] 1 [)] [x^2] [▼] 3 [▲] 38 [=] 3.819855204

Ví dụ 2: Cho tập hợp số sau đây:

$$A = \left\{ \frac{2n}{3n+2} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Tìm số hạng ứng với $n = 15$ của A.

2 X ▭ 3 X + 2 CALC 3 5 = $\frac{30}{47}$

1.2 Hàm số

Hàm số là một khái niệm cơ bản trong chương trình môn Toán bậc THPT. Thông qua máy tính cầm tay, các em có cơ hội nắm vững được các khái niệm trừu tượng thong qua các phép tính cụ thể.

Ví dụ 1: Điền các giá trị của các hàm số:

$y = f(x) = -2x^4 + 3x^2 + \frac{3}{8}$ và

$y = g(x) = \sqrt{3-4x}$

vào bảng sau đây (làm tròn hai số lẻ thập phân sau dấu phẩy)

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$f(x)$					
$g(x)$					

Trả lời:

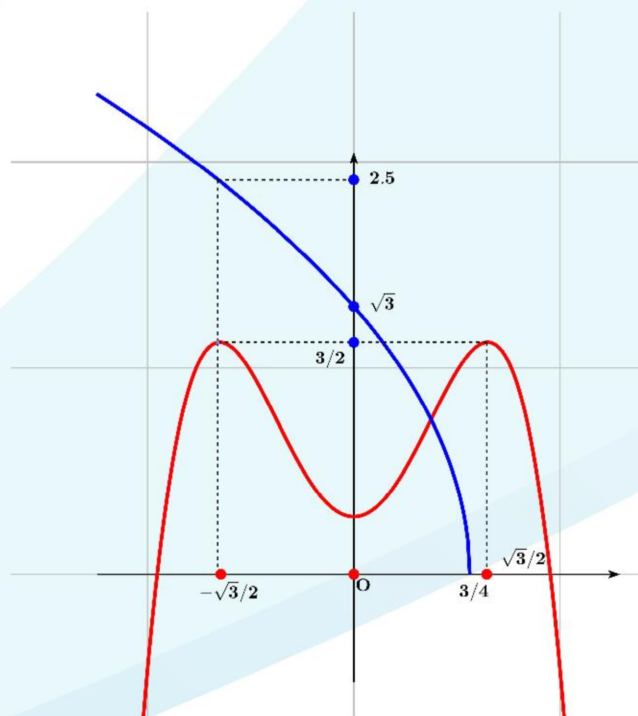
một bảng cho hai hàm số

MODE 7 $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + \frac{3}{8}$ = $g(x) = \sqrt{3-4x}$ =

Start $-\sqrt{3}$ = **End** $\sqrt{3}$ = **Step** $\sqrt{3}/2$ =

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	$-69/8$	$3/2$	$3/8$	$3/2$	$-69/8$
$g(x)$	3.15	2.54	1.73	‖	‖

Một trong các ứng dụng của việc lập bảng cho hai hàm số là vẽ hai đồ thị lên cùng một trục toạ độ, qua đó có thể biết số nghiệm của một phương trình. Khi đã biết số nghiệm của phương trình nào đó, dùng chức năng SHIFT CALC **(SOLVE)** của máy tính, ta có thể tìm được các nghiệm đó. Ví dụ đối với hai hàm số trên ta có đồ thị như sau:



Nhìn vào đồ thị, ta thấy phương trình:

$$-2x^4+3x^2+\frac{3}{8}=\sqrt{3-4x}$$

có một nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: (Bộ Giáo dục và Đào tạo, THPT, 2008-2009). Tính giá trị của hàm số:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sin x + 1}}{\ln(x^2 + \sqrt{x} + 3)}$$

tại điểm $x = 0.5$.

GIẢI

Tính giá trị của hàm số:

[▭/▭] [SHIFT] [√▭] ($\sqrt[3]{▭}$) [X] [x^2] [+] [sin] [X] [)] [+] [1] [▼] [ln] [X] [x^2] [+] [√▭] [X] [▶] [+] [3] [)] [CALC] **0.5** [=] **0.78495729**

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = f(x) = -1,32x^2 + \frac{3.1 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{6,4} - 7,2}x - 7,8 + 3\sqrt{2}$$

giá trị lớn nhất của hàm số bậc hai

[MODE] **5** **3** $-1,32$ [=] $\frac{3,1 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{6,4} - 7,2}$ [=] $-7,8 + 3\sqrt{2}$ [=] [=] [=] [=] X-Value Maximum $= 0,1112909362$ [=] Y-Value Maximum $= -3,541010225$

Lưu ý để nhập biểu thức $\frac{3.1 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{6,4} - 7,2}$ ta thực hiện như sau:

[(] **3.1** [−] **2** [√▭] **5** [)] [)] [▭/▭] [(] [√▭] **6.4** [)] [−] **7.2** [)]

Về phương diện trình bày lời giải, dựa vào kết quả máy tính cung cấp, ta viết:

$$f(x) = -1,32(x - 0,1112909362)^2 - 3,541010225$$

Vậy $f(x) \leqslant -3,541010225$ xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x = 0,1112909362$. Do đó GTLL của hàm số là $-3,541010225$.

1.3 Vấn đề giải hệ phương trình

Việc giải một hệ phương trình vừa là yêu cầu của một bài toán đại số nhưng đồng thời cũng vừa là một công cụ để giải các bài toán đai số khác, ví dụ tìm hệ số của một đa thức hay tìm giao điểm của hai đường thẳng.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y - z = 8 \\ 8x + 5y + 3z = 10 \end{cases}$$

hệ phương trình ba ẩn

MODE 5 2
2 = 2 = (−) 1 = 5 =
4 = 3 = (−) 1 = 8 =
8 = 5 = 3 = 1 0 =
= $X = 1$ = $Y = 1$ = $Z = -1$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn:

$$\begin{cases} x-y-z+t=35 \\ 2x-y+3z+5t=-70 \\ x+2y+3z-4t=0 \\ x-y-4z+t=14. \end{cases}$$

Khử $t=-x+y+z+35$ giữa các phương trình của hệ, ta có:

$$\begin{cases} 2x-y+3z+5(-x+y+z+35)=-70 \\ x+2y+3z-4(-x+y+z+35)=0 \\ x-y-4z+(-x+y+z+35)=14. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3x+4y+8z=-245 \\ 5x-2y-z=140 \\ -3z=-21. \end{cases}$$

hệ phương trình 4 ẩn

MODE 5 2

(−) 3 = 4 = 8 = (−) 2 4 5 =
5 = (−) 2 = (−) 1 = 1 4 0 =
0 = 0 = (−) 3 = (−) 2 1 =

= $X=-1$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
= $Y=-76$ SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**
= $Z=7$ SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

MODE 1 (−) A + B + C + 3 5 = $T=-33$

Ví dụ 3: Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm:

$$A(1,1,1), B(1,2,1), C(1,1,2), D(2,2,1)$$

GIẢI

Phương trình mặt cầu có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Thay toạ độ các điểm $A.B, C, D$ vào phương trình ta có:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ 2a + 4b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b + 4c - d = 6 \\ 4a + 4b + 2c - d = 9 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

MODE 5 2

2 − 2 = 2 − 4 = 2 − 2 = 3 − 6 =

2 − 2 = 4 − 2 = 2 − 4 = 6 − 6 =

2 − 4 = 2 − 4 = 4 − 2 = 6 − 9 =

= $\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

= $\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**

= $\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

MODE 1 2 A + 2 B + 2 C − 3 = **6**

Vậy phương trình mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

BÀI TẬP

Bài 1 Giải các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn sau đây:

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ -2y-3z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y+2z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=-5 \end{cases}$

Bài 2 Giải hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn sau đây:

$$\begin{cases} x+2y-4z+3t=1 \\ -x-2y+5z-2t=-3 \\ x+2y-3z+4t=5 \\ -2x-4y+10z-4t=6. \end{cases}$$ (Khử x)

Bài 3 Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$. Xác định a,b,c để cho (P) đi qua các điểm $A\left(2;\frac{13}{3}\right)$ $B\left(-\frac{3}{4};\frac{2551}{48}\right)$ $C\left(\frac{2}{5};-\frac{199}{15}\right)$

hàm số bậc hai

MODE 5 2
4 = 2 = 1 = 1 3 ▭ 3 =

9 ▭ 1 6 = (−) 3 ▭ 4 = 1 =
2 5 5 1 ▭ 4 8 =

4 ▭ 2 5 = 2 ▭ 5 = 1 =
(−) 1 9 9 ▭ 1 5 =

= **25** = **−49** = $\frac{7}{3}$

Vậy $f(x) = 25x^2 - 49x + \frac{7}{3}$.

Toán nhanh. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm

$$A(-1;2;3); B(2;-4;3); C(4;5;6)$$

Trả lời:

phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm

MODE 5 2

(−) 1 = 2 = 3 = (−) 1 =

2 = (−) 4 = 3 = (−) 1 =

4 = 5 = 6 = (−) 1 =

= $\frac{2}{13}$ = $\frac{1}{13}$ = $-\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là

$$6x + 3y - 13z + 39 = 0$$

1.4 Thống kê

Mỗi thế hệ máy có các cách sử dụng MODE Thống kê khác nhau. Do đó đối với máy tính Casio FX 570 VN Plus, trình tự sử dụng MODE Thống kê như sau:

① Nhấn MODE 1 để xóa số liệu thống kê cũ.

② Cài đặt chế độ số liệu có tần số: SHIFT MODE ▼ 4 1.

③ Chuyển sang MODE thống kê: MODE 3 1

4. Nhập số liệu xong nhấn [AC], lưu ý sau mỗi lần **viết** số liệu xong ta nhấn [=] để **nhập** liệu.

5. Để tính tổng, tổng bình phương ta nhấn [SHIFT] [1] [3] [2] (TỔNG), [CALC] [1] [3] [1] (TỔNG BÌNH PHƯƠNG) rồi nhấn [=].

6. Để tính TRUNG BÌNH ta nhấn [SHIFT] [1] [4] [2] [=].

7. Để tính TẦN SỐ ta nhấn [SHIFT] [1] [4] [1] [=].

8. Muốn xem ĐỘ LỆCH TIÊU CHUẨN ta nhấn [SHIFT] [1] [4] [4] [=].

9. Muốn xem PHƯƠNG SAI ta nhấn [SHIFT] [1] [4] [3] [=] [x^2] [=].

Ví dụ 1: Một xạ thủ thi bắn súng. Kết quả số lần bắn và điểm số được ghi như sau:

Điểm	4	5	6	7	8	9
Lần bắn	8	14	3	12	9	13

Tính:

1. Tổng số lần bắn.

2. Tổng số điểm

3. Số điểm trung bình cho mỗi lần bắn.

toán thống kê

MODE 1
SHIFT MODE ▼ 4 1
MODE 3 1
4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 =
▶ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲
8 = 1 4 = 3 = 1 2 = 9 = 1 3 = AC

toán thống kê

(1) Tổng số lần bắn n. SHIFT 1 4 1 = 59

(2) Tổng số điểm (sum): SHIFT 1 3 2 = 393

(3) Số điểm trung bình cho mỗi lần bắn $\overline{x}$: SHIFT 1 4 2 = 6.66.

Ví dụ 2: Sản lượng lúa (đơn vị tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24
Tần số (n)	5	8	11	10	6

Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

toán thống kê

MODE 1

SHIFT MODE ▼ 4 1

MODE 3 1

2 0 = 2 1 = 2 2 = 2 3 = 2 4 =

▶ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲

5 = 8 = 1 1 = 1 0 = 6 = AC

Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng:

$\overline{x}$: SHIFT 1 4 2 = 22,1.

1.5 Tỉ số lượng giác của một góc

1. Đổi đơn vị từ độ sang radian và ngược lại

Ví dụ 1: Đổi $\alpha = 33°$ sang radian.

Muốn đổi sang **radian** ta chuyển máy tính về **mode radian**
SHIFT MODE 4
Nhập số 33 sau đó bấm SHIFT Ans (DRG▶) 1 màn hình sẽ hiện ra 33°, ta nhấn = sẽ được $\frac{11}{60}\pi$

Ví dụ 2: Đổi $\alpha = 33°30'$ sang radian.

Nhập 33 [°'''] 30 [°'''] màn hình sẽ hiện ra 33□30□
sau đó bấm [SHIFT] [Ans] (DRG▸) [1] màn hình sẽ hiện ra 33□30□°, ta nhấn [=] sẽ được $\frac{67}{360}\pi$

Ví dụ 3: Đổi $\alpha = \frac{\pi}{15}$ sang độ.

Muốn đổi sang **độ** ta chuyển máy tính về **mode độ** [SHIFT] [MODE] [3]
Nhập số $\frac{\pi}{15}$ bằng cách nhấn phím: [SHIFT] [×10^x] (π) [▭/▭] 15 [▶]
sau đó bấm [SHIFT] [Ans] (DRG▸) [2] màn hình sẽ hiện ra $\frac{\pi}{15}$ r, ta nhấn [=] sẽ được 12 nghĩa là 12°.

Ví dụ 4: Đổi $\alpha = \frac{\pi}{17}$ sang độ.

Nhập số $\frac{\pi}{17}$ bằng cách nhấn phím: [CALC] [×10^x] [SHIFT] [×10^x] (π) [▭/▭] 17 [▶]
sau đó bấm [SHIFT] [Ans] (DRG▸) [2] màn hình sẽ hiện ra $\frac{\pi}{17}$ r, ta nhấn [=] sẽ được 10.58823529 nhấn vào phím [°''']
ta được kết quả là: $10°35'17''$ và 65% giây.

1.6 Tính các giá trị lượng giác

Ví dụ 1: Cho $\sin\alpha = 0,4$; $\cos\beta = 0,7$ (α, β đều là các góc nhọn). Hãy tính $\sin(2\alpha + 3\beta)$.

CALC sin 0.4) SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
CALC cos 0.7) SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**
sin 2 A + 3 B) = -0.0676 (làm tròn 4 số lẻ)

Ví dụ 2: Biết $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$. Hãy tính $A = \frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Nhập vào màn hình biểu thức: $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$
Nhấn vào phím CALC, sau đó nhập x bằng:
2 SHIFT tan 1 ▭/▭ 4 = $\frac{8}{19}$.

Ví dụ 3: Tính $\sin^3 x - \cos^3 x$ biết $\cos 2x = \frac{3}{5}$.

Nhập vào màn hình biểu thức $\sin^3 x - \cos^3 x$ như sau:
sin X) x^3 − cos X) x^3
CALC 1 ▭/▭ 2 SHIFT cos 3 ▭/▭ 5) =

Vậy giá trị của biểu thức là: -0.6261.

1.7 Hệ thức lượng trong tam giác

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $b = 7\ cm$; $c = 5\ cm$; $\widehat{A} = 81°47'12''$.

1. Tính diện tích tam giác ABC.
2. Tính độ dài BC.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Chuyển máy tính qua MODE radian.

Hệ thức lượng trong tam giác

1. Nhập $\widehat{A}, b, c$ vào màn hình và lưu vào [A], vB, [C]

   $81°47'12''$ [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A)

   7 [SHIFT] [RCL] (STO) [°'''] (B)

   5 [SHIFT] [RCL] (STO) [hyp] (C)

   $S = \frac{1}{2}bc\sin A$: 1 [▭/▭] 2 [▶] [ALPHA] [B] [ALPHA] [C] [sin] [ALPHA] [A] [)] [=] $17{,}3250\ cm^2$.

Hệ thức lượng trong tam giác

2. Độ dài $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$:

   [√▭] [B] [x^2] [+] [C] [x^2] [−] 2 [B] [C] [cos] [A] [)] [▶] [=]

3. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{BC}{2\sin A}$.

   [Ans] [▭/▭] 2 [sin] [A] [)] [▶] [=] $4{,}0414\ cm$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $a = 8\ cm$; $b = 7\ cm$; $c = 5\ cm$. Gọi A', B', C' là chân ba đường cao hạ từ A, B, C tương ứng. Tìm diện tích tam giác $A'B'C'$.

Gọi S', S lần lượt là diện tích của các tam giác $A'B'C'$ và ABC.

Ta có: $\dfrac{S'}{S} = 2\cos A \cos B \cos C$

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Tính $\cos A$

8 SHIFT RCL (STO) (−) (A)
7 SHIFT RCL (STO) °''' (B)
5 SHIFT RCL (STO) hyp (C)
▭/▭ B x^2 + C x^2 − A x^2 ▼ 2 B C SHIFT
RCL (STO) sin (D)

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

Tính $\cos B$

▭/▭ A x^2 + C x^2 − B x^2 ▼ 2 A C SHIFT
RCL (STO) cos (E)

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Tính $\cos C$

▭/▭ A x^2 + B x^2 − C x^2 ▼ 2 A B
SHIFT RCL (STO) tan (F)

$S' = bc\sin A\cos A\cos B\cos C$

B C √■ 1 − D x² ▶ D E F = 1,9441 cm^2

1.8 Hệ trục toạ độ

Ví dụ: Cho tam giác ABC với $A(-4;-3\sqrt{2}), B(2\sqrt{3};-5), C(1;3)$. Tính góc A và diện tích tam giác ABC.

$\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}+4;-5+3\sqrt{2})$; $\overrightarrow{AC} = (5;3+3\sqrt{2})$

MODE 8 1 2

Nhập toạ độ $\overrightarrow{AB}$.

SHIFT 5 2 2 2

Nhập toạ độ $\overrightarrow{AC}$

bấm AC (xoá màn hình)

$\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

(SHIFT 5 3 CALC 5 7 CALC 5 4) ▭ (CALC Abs SHIFT 5 3) CALC 5 4)) 0.4821465811

SHIFT cos Ans = °'" = $61°10'28''$

1.9 Đường tròn

Ví dụ 1: Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm

$$A(1;2), B(5;2), C(1;-3)$$

Phương trình đường tròn có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Thay toạ độ của các điểm A, B, C vào phương trình ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a+4b+c & = & -5 \\ 10a+4b+c & = & -29 \\ 2a-6b+c & = & -10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & -3 \\ b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & -1 \end{cases}$$

Bấm máy tính giải hệ 3 phương trình MODE 5 2

Giải hệ 3 phương trình

2 = 4 = 1 = (−) 5 =
1 0 = 4 = 1 = (−) 2 9 =
2 = (−) 6 = 1 = (−) 1 0 =
= -3 = $\frac{1}{2}$ = -1

Ta được phương trình đường tròn:

$$x^2 + y^2 + 6x - y - 1 = 0$$

Ví dụ 2: Tìm giao điểm của hai đường tròn. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-4;8)$; $C(1;-7)$. Gọi M điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Biết $N(5;-4)$ hãy tìm toạ độ điểm B. *Phỏng theo ĐH A2013.*

Giải:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật:

$$x^2 + y^2 + 3x - y - 60 = 0$$

Phương trình đường tròn đường kính BM:

$$x^2 + y^2 - 2x + 14y + 25 = 0$$

Toạ độ giao điểm B và N của hai đường tròn là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - y - 60 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 14y + 25 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) suy ra $x = 3y + 17$ thay vào (2):

$$(3y + 17)^2 + y^2 - 2(3y + 17) + 14y + 25 = 0$$

Ta sẽ thảo luận về việc giải phương trình bậc 2.

Cách 1: MODE 5 3

MODE **5 3**
$3^2 + 1$ =
$2 \times 3 \times 17 - 2 \times 3 + 14$ =
$17^2 - 2 \times 17 + 25$ = = $-4; -7$

Vì N có tung độ là -4 nên $y_B = -7 \Rightarrow x_B = -4$. Vậy $B(-4; -7)$

Cách 2: SHIFT CALC (SOLVE)

▭ $(3x + 17^2) + x^2 - 2(17 + x) + 14x + 25$ ▼ $x + 4$ =
◀ = -4 = -7

1.10 Ba đường conic

Ví dụ 1: Viết phương trình chính tắc của êlip qua hai điểm $M\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{13}}{4}\right)$ và $N\left(\sqrt{5}; \dfrac{3\sqrt{11}}{4}\right)$.

Phương trình chính tắc của êlip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Thay toạ độ của M và N vào phương trình ta được:

$$\begin{cases} 3x + \dfrac{117}{16}y = 1 \\ 5x + \dfrac{99}{16}y = 1 \end{cases}$$

với $x = \dfrac{1}{a^2}$; $y = \dfrac{1}{b^2}$.

Bấm máy tính giải hệ phương trình

MODE 5 1
3 = 1 1 7 ▭/▭ 1 6 = 1 =

5 = 9 9 ▭/▭ 1 6 = 1 = =

ta tính được $x = \dfrac{1}{16}$; $y = \dfrac{1}{9}$.

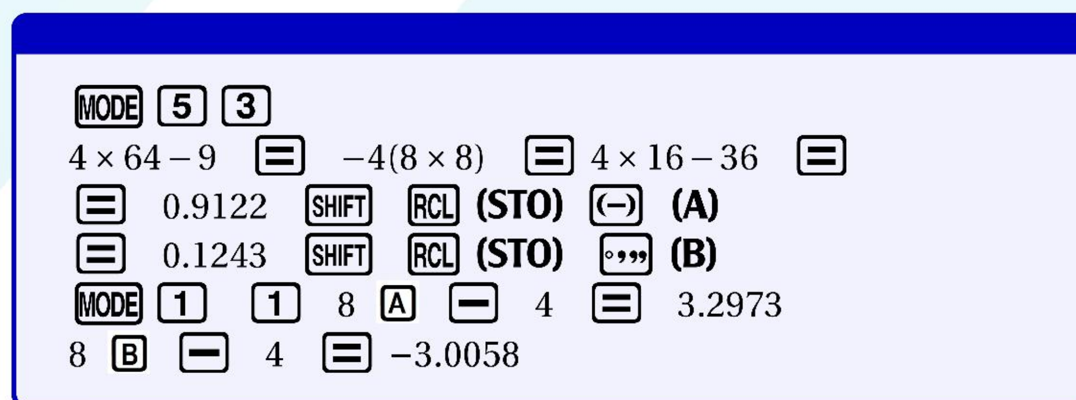
Vậy $a^2 = 16$; $b^2 = 9$.

Phương trình chính tắc của êlip là $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Ví dụ 2: Tìm gần đúng toạ độ giao điểm của đường thẳng $x-8y+4=0$ với hyperbol $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Xét phương trình:

$$4(8y-4)^2-9y^2=36$$



Vậy $A(3.2973;0.9122)$ và $B(-3.0058;0.1243)$

Ví dụ 3 (D2005): Cho êlip $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$, điểm $C(2;0)$. Tìm các điểm A và B trên êlip và đối xứng nhau qua trục hoành sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

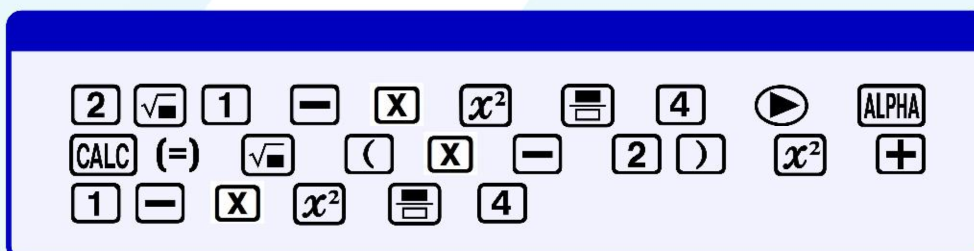
Tam giác ABC cân tại C do đó nó là tam giác đều khi và chỉ khi

$$AB = AC \text{ trong đó } A(x;y) \text{ với } y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Ta có phương trình:

$$2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{(x-2)^2+1-\frac{x^2}{4}}$$

1. Nhập phương trình lên màn hình:

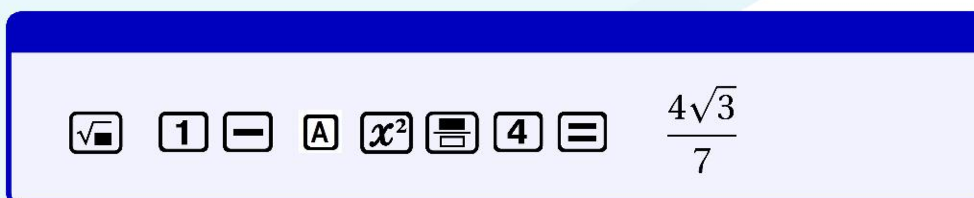


2. SHIFT CALC **(SOLVE)**

3. Khi được hỏi, bấm số 1 (chú ý $-2 \leqslant x \leqslant 2$ chờ và nhận một nghiệm 0.2857142857 (ta dự đoán đây là số thập phân vô hạn tuần hoàn)

4. Bấm RCL X ta sẽ nhận được nghiệm hữu tỉ là $x = \dfrac{2}{7}$

5. Tính y



Vậy hai điểm cần tìm là $A\left(\dfrac{2}{7}; \dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\dfrac{2}{7}; -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Ví dụ 4 (B2010): Cho êlip $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$, tiêu điểm F_1, F_2 (F_1 có hoành độ âm), $A(2;\sqrt{3})$. Đường thẳng AF_1 cắt êlip tại điểm M có tung độ dương. N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

$F_1(-1;0)$; $F_2(1;0)$

$AF_1 : \sqrt{3}x - 3y + \sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}y - 1$

Tung độ điểm N là nghiệm của phương trình:

$$2(\sqrt{3}y - 1)^2 + 3y^2 = 6$$

MODE 5 3
$2 \times 3 + 3$ = $-4\sqrt{3}$ = $2 - 6$ =
= $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ SHIFT RCL (STO) °’’’ (B)
MODE 1 $\sqrt{3}$ A − 1 = SHIFT RCL
(STO) (−) (A)

$M\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

2 × A − 1 SHIFT RCL (STO) hyp (C)
2 × B − 0 SHIFT RCL (STO) sin (D)

$N\left(1; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

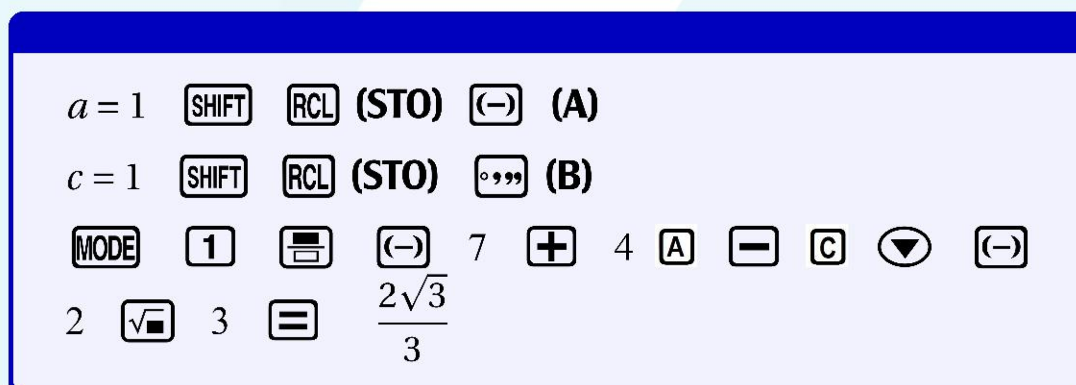
Phương trình đường tròn có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Thay toạ độ những điểm mà đường tròn đi qua ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4a - 2\sqrt{3}b + c = -7 \\ -2a + c = -1 \\ -2a - \frac{8\sqrt{3}}{3}b + c = -\frac{19}{3} \end{cases}$$

Giải ra



Vậy phương trình đường tròn cần tìm:

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4\sqrt{3}}{3}y + 1 = 0$$

Lưu ý: Theo cách này ta không quan tâm tới tam giác ANF_2 có vuông hay không.

Ví dụ 5: (Bộ Giáo dục và Đào tạo, THPT, 14.3.2008)

Tính gần đúng tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 2x$ với elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của elip và parabol là:

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 - 1 = 0$$

Ta sử dụng thao tác sau đây để tìm 4 nghiệm của phương trình trên.

1. Nhập vế trái của phương trình trên trong một cặp dấu đóng mở ngoặc đơn lên màn hình:

$$\left(\frac{x^2}{9}+(x^2-2x)^2-1\right)$$

sau đó nhấn dấu [=] *(để lưu biểu thức)*

2. Nhấn [SHIFT] [CALC] **(SOLVE)**, nhập số 0 và nhấn dấu [=] và chờ khá lâu, nếu trên màn hình xuất hiện một thông báo như sau:

```
Continue:[=]
X=     101.569856
L-R= 102279900.1
```

thì bạn nhấn dấu [=] để tiếp tục, chờ và nhận nghiệm thứ nhất là 2.283900202 lưu vào [A] .

3. Bấm [▲] để cuộn màn hình lên và nhấn [◀] để đưa con trỏ lên dòng công thức, bấm vào [▭/▭] để chia biểu thức cho $x-a$, thể hiện trên màn hình ([X] [−] [A]).

   Bấm [SHIFT] [CALC] **(SOLVE)**, nhấn dấu [=] để chấp nhận [A], tiếp tục nhấn dấu [=] để chấp nhận [X], chờ và nhận nghiệm thứ hai là 1.31914171 lưu vào [B].

4. Lập lại qui trình trên, chia biểu thức cho $(x-a)(x-b)$; $(x-a)(x-b)(x-c)$ ta tìm được hai nghiệm còn lại là:

$$0.807813066\ ; -0.410877979.$$

Vậy toạ độ 4 giao điểm cần tìm (làm tròn 4 số lẻ thập phân) là:
$A(2.2839;0.6484)$, $B(1.3191;-0.8981)$, $C(0.8078;-0.9306)$
$D(-0.4109;0.9906)$

Mẹo Vặt

Trong phần Phụ lục (trang138) chúng tôi có đề cập đến sáng kiến của học sinh trong việc sử dụng MTCT trong giải toán ở bậc THPT. Ở đây dựa vào ý tưởng đó, chúng tôi đề nghị giải bài toán sau đây:

Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 7mx - 566}{3x - 9} \quad (C)$$

và đường thẳng: $d : mx - 3m + 7$.
Xác định m (với giá trị đúng) để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

GIẢI

Để đơn giản, trong bài này ta không đề cập tới các điều kiện.

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^2 + 7mx - 566 - (3x - 9)(mx - 3m + 7) = 0 \quad (1)$$

Dùng số phức để khai triển, thay m bằng i.

MODE 2 X x^2 + 7 ENG X − 5 6 6 − (
3 X − 9) (ENG X − 3 ENG + 7) CALC
Khi được hỏi **X?** ta nhập **1000** = S⇔D

```
CMPLX   D   Math ▲
(X²+7iX-566)-(3▶
            978497
         -2975027i
```

(xem tiếp trang 112)

BITEX

CÔNG TY CP XNK BÌNH TÂY

PHẦN I

CÁC TÍNH NĂNG VƯỢT TRỘI CỦA MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS

CHƯƠNG 2

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS TRONG CHƯƠNG TRÌNH LỚP 11

Máy tính CASIO 570VN Plus là một công cụ tính toán hữu hiệu để giải hoặc trợ giúp học sinh giải hầu hết các bài toán có trong chương trình Trung học Phổ thông. Việc sử dụng hiệu quả máy tính này, giúp học sinh dành nhiều thì giờ hơn để giải các bài toán mà không thể giải được bằng máy tính, ví dụ các bài toán có chứa tham số. Trong chương này chúng ta sẽ đề cập đến các bài toán về Giải tích (lớp 11 và 12) như giới hạn, đạo hàm, tích phân, dãy số cho bằng biểu thức qui nạp v.v…

2.1 Phương trình lượng giác

1. Phương trình lượng giác cơ bản

Phương trình $\sin x = \alpha$

Ta chuyển máy về MODE radian.

1. Bấm SHIFT sin α = ta tìm một nghiệm chính, lấy nghiệm này cộng với $k2\pi$.

2. Nghiệm chính còn lại là $\pi - \alpha$, lấy nghiệm này cộng với $k2\pi$.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SHIFT MODE 4

SHIFT ×10ˣ SHIFT ×10ˣ (π) ▭/▭ 10 + CALC sin √▭ 3 ▼ 2 ▶) = SHIFT RCL (STO) (−) (A) $\frac{13\pi}{30}$

Dùng phím ▲ cuộn màn hình cũ lên rồi sửa chữa như sau:

SHIFT ×10ˣ SHIFT ×10ˣ (π) ▭/▭ 10 + CALC ×10ˣ SHIFT ×10ˣ (π) − CALC sin √▭ 3 ▼ 2 ▶) = $\frac{23\pi}{30}$

Vậy hai tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{13\pi}{60} + k\pi \\ x = \frac{23\pi}{60} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Các phương trình lượng giác cơ bản còn lại thực hiện tương tự.

2. Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$

Biến đổi tương đương thành $r\sin(x+\theta) = c$ như sau:

SHIFT + (Pol) a CALC) SHIFT) , b) =

Màn hình sẽ xuất hiện r và θ với θ đo bằng radian ta có thể đổi sang "π" bằng cách bấm phím RCL Y

Ghi nhớ:

Nếu $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ thì phương trình có hai tập hợp nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{lcl} x & = & \arcsin\frac{c}{r} - \theta + k2\pi \\ x & = & \pi - \arcsin\frac{c}{r} - \theta + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$

SHIFT + (Pol) 1 CALC) SHIFT) , √■ 3 ▶) =

$r = 2$, $\theta = 1.047197551$

RCL Y $\frac{\pi}{3}$.

Vậy $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2 \Longleftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$

giải tiếp như ví dụ 1.

SHIFT sin (sin⁻¹) (–) 2 ▭ ALPHA) X ▶) − ALPHA S⇔D Y =

Vậy phương trình có một nghiệm là:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3: Sở Giáo dục và Đào tạo TP HCM 08/01/2012. Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình:

$$\sqrt{2}\cos 7x - 3\sin 7x = \sqrt{3} \quad (2011^\circ < x < 2050^\circ)$$

Nhận xét:

- Chuyển máy tính sang MODE độ: SHIFT MODE 3

- $14077° < 7x < 14350°$
- $39 \times 360° = 14040°$; $40 \times 360° = 14400°$

GIẢI

Giải phương trình $a\sin 7x + b\cos 7x = c$

SHIFT + (Pol) (−) 3 SHIFT) √■ 2 =

SHIFT sin (sin⁻¹) √■ 3 ▶ ▭/▭ X ▶) − Y = −123.2784441 SHIFT RCL (STO) cos (E)

◀ DEL ▶ 1 8 0 − −6.242752285 SHIFT RCL (STO) tan (F)

E + **14400** = **14276.7215** (thoả) ÷ 7 = °’’’ $2039°31'53.94''$

F + **14400** = **14393.75725** (không thoả)

Vậy $x = 2039°31'54''$.

3. Phương trình đưa về PTLG cơ bản

Máy tính có khả năng chuyển đổi biểu thức $r\sin(x+\theta)$ với $r > 0$ thành $a\sin x + b\cos x$.

Rec(r,θ)

SHIFT − (Rec) r CALC) SHIFT) , θ) =

Ví dụ 4: ĐH A.2008. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$$

Bấm máy tính (chuyển máy sang mode radian)

SHIFT − (Rec) **1** CALC) SHIFT) , $-\frac{3\pi}{2}$)

= $X=0; Y=1$

Vậy $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos x$

SHIFT − (Rec) **4** CALC) SHIFT) , $-\frac{7\pi}{4}$)

= RCL X $2\sqrt{2}$

RCL Y $2\sqrt{2}$

Vậy $\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\Longleftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sqrt{2}\sin 2x)=0$$

và ta giải như các phương trình thông thường khác.

Ví dụ 5: Bộ Giáo dục và Đào tạo, THPT, 14.3.2008. Tìm nghiệm (đo bằng độ) của phương trình:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x\cos x=3+\sqrt{3}$$

Giải

Phương trình được viết:

$$3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3$$

Bấm máy tính

SHIFT + 3 SHIFT) √■ 3 ▶ = $r = 2\sqrt{3}, \theta = 30$

SHIFT sin (sin⁻¹) 3 ▭ ALPHA) X ▶) − ALPHA S⇔D Y = ÷ 2 = 15

Vậy tập hợp nghiệm thứ nhất là $x = 15° + k180°$

▲ ◀ ▶ 1 8 0 − = ÷ 2 = 45

Vậy tập hợp nghiệm thứ hai là $x = 45° + k180°$

Ví dụ 5: (Sở Giáo dục và Đào tạo thp Hồ Chí Minh, THPT, 11.1.2009). Cho $x \in (2\pi;3\pi)$, $y \in (0;\pi)$ và thoả các phương trình:

$$\tan x = 2 \quad ; \quad 2\sin y + 3\cos y = 1$$

Hãy tính:

$$A = \frac{\tan^2(x^2 - y) + \cot^2(x - y^2)}{\sin^2(x^2 + y) + \cos^4(x + y^2)}$$

Giải

Tính x y thoả giả thiết

SHIFT tan (tan⁻¹) 2) = **1.107148718**
◀ + 2 ×10ˣ (π) = **7.390334025** SHIFT RCL
(STO) (−) (A)
SHIFT + 2 SHIFT) 3) = $r = 3.605551275 = \sqrt{13}$; $\theta = 0.9827937232$
SHIFT sin (sin⁻¹) 1 ▭ ALPHA) X ▶)
− ALPHA S⇔D Y = **−0.7017588217**
◀ ▶ SHIFT ×10ˣ (π) − = **1.87774029** SHIFT
RCL (STO) ,,, (B)

Tính A

▭ tan A x^2 − B) x^2 + tan A
− B x^2) $x^{\blacksquare}$ (−) 2 ▼
sin A x^2 + B) x^2 + cos A + B
x^2) $x^{\blacksquare}$ 4 = **649.2957822**

2.2 Dãy số - cấp số cộng - cấp số nhân

Ví dụ 1: Cho dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$.

Hãy viết 10 số hạng đầu tiên rồi tính tổng và tích của 10 số hạng ấy.

Để viết 10 số hạng đầu tiên của dãy này ta vào chế độ lập bảng.

Giải:

lập bảng

MODE 7

Nhập hàm $f(x)=\frac{3^x}{x^3}$

Start **1** = End **10** = Step **1** =

Ta có bảng như bên cạnh.

	x	$f(x)$
1	1	3
2	2	$\frac{9}{8}$
3	3	1
4	4	$\frac{81}{64}$
5	5	$\frac{243}{125}$
6	6	$\frac{27}{8}$
7	7	$\frac{2187}{343}$
8	8	$\frac{6561}{512}$
9	9	27
10	10	$\frac{59049}{1000}$

Để tính tổng của 10 số hạng đầu tiên này ta bấm phím như sau:

tính tổng của 10 số hạng đầu tiên

SHIFT log (Σ▬)

Nhập hàm $\frac{3^x}{x^3}$ ▼ 1 ▲ 10

= 116.9492

Để tính tích của 10 số hạng đầu tiên này ta bấm phím như sau:

tính tích của 10 số hạng đầu tiên

ALPHA log (Π)

Nhập hàm $\frac{3^x}{x^3}$ ▼ 1 ▲ 10 = 3650731.65

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng:

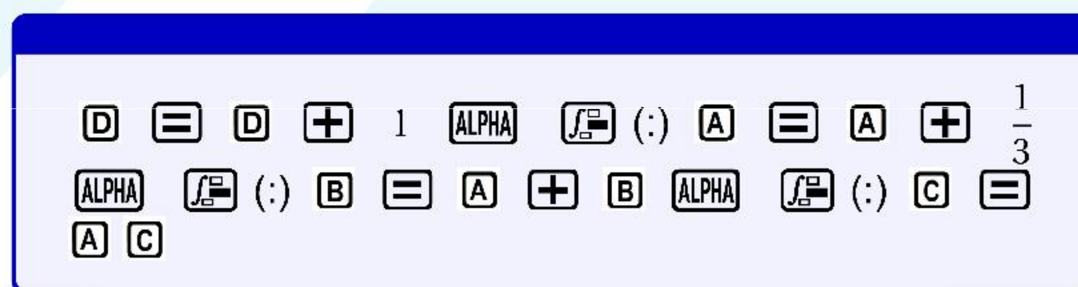
$$3,\frac{10}{3},\frac{11}{3},4\ldots$$

Không dùng công thức, hãy sử dụng máy tính CASIO FX 570 VN Plus, hãy tính số hạng thứ 12, tổng của 12 số hạng đầu và tích của 12 số hạng đó..

Giải:

Ta sẽ dùng D làm biến đếm, A là số hạng thứ D, B là tổng của D số hạng đầu tiên và C là tích của D số hạng đầu tiên.

Viết lên màn hình như sau:



nhấn vào CALC khi hỏi D ta nhập số 0, khi hỏi A ta nhập $\frac{8}{3}$, khi hỏi B ta nhập số 0 và khi hỏi C ta nhập số 1.

Sau đó nhấn liên tiếp dấu = cho đến khi thấy $D = 12$ thì tiếp sau đó là đáp số:

$$u_{12} = \frac{20}{3}\ ;\ S_{12} = 58\ ; P_{12} = 113540038,4$$

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân:

$$60, 40, \frac{80}{3}, \ldots$$

Không dùng công thức, hãy sử dụng máy tính CASIO FX 570 VN Plus, hãy tính số hạng thứ 20, tổng của 20 số hạng đầu và tích của 20 số hạng đó..

ĐS: $u_{20} = 0,0271\ ; S_{20} = 179,4959\ ;\ P_{20} = 127,5516$

2.3 Giới hạn của dãy số

Khái niệm về giới hạn của dãy số là một khái niệm khá trừu tượng đối với học sinh.

Giả sử (u_n) là một dãy số. Ta định nghĩa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - L| < \varepsilon$$

Ví dụ: (Bộ Giáo dục và Đào tạo, Trung học Phổ thông, 11.3.2011)
Cho dãy số được xác định bởi biểu thức:

$$u_n = \sqrt[3]{5 + \sqrt[3]{5 + \sqrt[3]{5 + \cdots + \sqrt[3]{5}}}} \quad \text{(n dấu căn)}$$

Tìm n_0 để với mọi $n \geqslant n_0$ thì u_n gần như không thay đổi (chỉ xét đến chín chữ số thập phân).

Trả lời:
Ta có nhận xét: $u_1 = \sqrt[3]{5}$, $u_n = \sqrt[3]{5 + u_{n-1}}$, $n \geqslant 2$

Tìm n_0

SHIFT √■ (³√■) 5 =
SHIFT √■ (³√■) 5 + Ans = **1.886138823**
= **1.902502595**
= **1.904008398**
= **1.904146843**
= **1.904159571**
= **1.904160741**
= **1.904160848**
= **1.904160858**
= **1.904160859**
= **1.904160859**
…

Qua bảng kê trên, ta thấy số tự nhiên n_0 nhỏ nhất sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì u_n gần như không thay đổi (chỉ xét đến chín chữ số thập phân) là **10**. Ngoài ra ta cũng có thể diễn giải cho học sinh hiểu thông qua kết quả trực quan này là:
Tồn tại $n_0 = 10$ sao cho $\forall n \geqslant 10 \Longrightarrow |u_n - 1.90410859| < 10^{-10}$
Vậy theo định nghĩa ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1.90410859$

Nhận xét: Nhìn vào bảng liệt kê ta có nhận xét:

1. (u_n) là một dãy tăng

   Hướng dẫn. *Kiểm tra* $u_n > u_{n-1} \Longleftrightarrow 5 + u_{n-1} > u_{n-1}^3$

2. (u_n) bị chặn trên bởi số 2 *(chứng minh bằng qui nạp)*

Vậy dãy (u_n) hội tụ, giả sử về ℓ. Khi đó ℓ là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - x - 5 = 0$$

Bấm máy tính giải phương trình bậc 3 ta thấy phương trình này có một nghiệm duy nhất là 1.90410859. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1.90410859$$

Tuy nhiên công việc đó không dễ dàng đối với học sinh lớp 11.

2.4 Dãy số cho bằng biểu thức qui nạp

2.4.1 Dãy số Fibonacci

Sự ra đời của máy tính CASIO 570VN Plus làm cho việc thiết lập một dãy số cho bằng biểu thức qui nạp dựa vào hai số hạng đứng trước đơn giản hơn rất nhiều, đó là do máy tính được đưa vào ô nhớ

PreAns (ALPHA Ans), trước đó máy tính chỉ sử dụng ô nhớ Ans để lưu kết quả cuối cùng.

Trước hết ta nói về dãy số Fibonacci:

$1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233;377;610;987;1597;$
$2584;4181;6765;10946;17711;28657;46368;75025;1213931$
$196418;317811;514229;832040;1346269;2178309\ldots$

Biểu thức qui nạp của dãy số Fibinasi như sau:

$u_1 = 1$; $u_2 = 1$
$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n = 3,4,5,6\ldots$

Dựa vào định nghĩa, ta bấm phím như sau:

Các số hạng của dãy số Fibonacci

1 = 1 =
ALPHA Ans **(PreAns)** + Ans =
= = = = = …

Lưu ý: Công thức số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci là

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Nhận xét: Nhờ MTCT ta có thể nhanh chóng liệt kê các số hạng của dãy số Fibonacci và dựa vào đó ta nhận xét rằng: kể từ số hạng thứ 24 trở đi, tỉ số giữa một số và số đứng liền trước là một hằng số (gọi là *tỉ số vàng*) và hằng số đó bằng $1.618033989 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2.4.2 Dãy số qui nạp dựa vào hai số hạng đứng trước

Giả sử ta có một dãy số $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ như sau:

$$u_1 = a\ ;\ u_2 = b\ ;\ u_n = Au_{n-1} + Bu_{n-2}$$

Hãy xác định số hạng thứ i của dãy số (với i là một số xác định)

Áp dụng bằng số:

$$u_1 = 3\ ,\ u_2 = 2\ ;\ u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \quad (n \geqslant 3).\ \text{Tính } u_{21}$$

Qui trình bấm phím:

3 [=] 2 [=]

2 [Ans] [+] 3 [ALPHA] [Ans] **(PreAns)** [=] u_3

[=] [=] [=] … 18 lần nhấn dấu [=]

Ta được $u_{21} = 4358480503$

BÀI TẬP

Bài 1. Bài tập tương tự: Cho dãy số xác định bởi:

$$u_1 = 17, u_2 = 29 \quad ; u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n \quad (n \geqslant 1)$$

Tính u_{15}

Bài 2. Cho một dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 = 1\ ;\ u_2 = 2\ ;\ u_{n+2} = \begin{cases} 2u_{n+1} + 3u_n & \text{nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 3u_{n+1} + 2u_n & \text{nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$$

với $n \geqslant 1$. Tính u_{10} ; u_{15} ; u_{21}.

u_1	1	
u_2	2	
u_3	7	
u_4		25
u_5	71	
u_6		263
u_7	739	
u_8		2743
u_9	7703	
u_{10}		28595
u_{11}	80299	
u_{12}		298087
u_{13}	837071	
u_{14}		3107387
u_{15}	8725987	

1 [=]
2 [=]
2 [Ans] [+] 3 [ALPHA] [Ans] [=]
3 [Ans] [+] 2 [ALPHA] [Ans] [=]
[▲] [=] copy lệnh được u_5
[▲] [=] copy lệnh được u_6
v.v...

Lưu ý: Nếu biểu thức qui nạp chỉ có một biểu thức, ta chỉ cần gõ dấu bằng [=] sẽ copy được công thức.

Nếu biểu thức qui nạp cho bằng hai biểu thức, ta bấm mũi tên lên rồi gõ dấu bằng [=] sẽ copy được công thức.

2.4.3 Dãy số dựa vào ba số hạng đứng trước

Một dãy số xác định bởi một biểu thức qui nạp dựa vào hai số hạng đứng trước bằng cách sử dụng hai bộ nhớ [Ans] và [ALPHA] [Ans] **(Pre-Ans)** các bạn có thể đọc ở chương 3. Tuy nhiên trong các kỳ thi Học sinh giỏi Máy tính cầm tay THCS cấp Bộ hay yêu cầu thí sinh thiết lập một dãy số qui nạp dựa vào 3 số hạng đứng trước. Do đó trong phần này chúng ta sẽ trao đổi về nội dung này và hướng dẫn học sinh

sử dụng máy tính để giải bài toán được đặt ra cho họ.

Ví dụ 1: ***Thi giải toán trên MTCT/ 2011 Bộ GD và ĐT.***

Cho một dãy số (u_n) được xác định như sau:
$u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$;
$u_{n+3} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n \ (n \geqslant 1)$

1. Viết qui trình bấm máy tính để thực hiện u_{n+3}.
2. Dựa vào đó để tính u_{19} ; u_{20} ; u_{66} ; u_{67} ; u_{68}

Phân tích: Ba số hạng đầu tiên ta lần lượt gán vào **A, B, C**.

Sau đó ta thiết lập công thức tính 3 số hạng tiếp theo với qui ước như sau:

Trước **C** là **B,**

trước **B** là **A**,

trước **A** là **C**.

Các số hạng của dãy thay vì đánh số $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$, $u_9 \ldots$ ta sẽ liệt kê là

A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, B, C …

Bài giải:

u_1	1	A	
u_2	2	B	
u_3	3	C	
u_4	2	A	2C-3B+2A→ A
u_5	-1	B	2A-3C+2B → B
u_6	-2	C	2B-3A+2C → C
u_7	3	A	2C-3B+2A
u_8	10	B	2A-3C+2B
u_9	7	C	2B-3A+2C
u_{10}	-10	A	2C-3B+2A
u_{11}	-21	B	2A-3C+2B
u_{12}	2	C	2B-3A+2C
u_{13}	47	A	2C-3B+2A
u_{14}	46	B	2A-3C+2B
u_{15}	-45	C	2B-3A+2C
u_{16}	-134	A	2C-3B+2A
u_{17}	-41	B	2A-3C+2B
u_{18}	230	C	2B-3A+2C
u_{19}	315	A	2C-3B+2A

1 SHIFT RCL (STO) (−) (A)
2 SHIFT RCL (STO) °,,, (B)
3 SHIFT RCL (STO) hyp (C)

2 C − 3 B + 2 A
SHIFT RCL (STO) (−) (A)

2 A − 3 C + 2 B
SHIFT RCL (STO) °,,, (B)

2 B − 3 A + 2
C SHIFT RCL (STO) hyp (C)

▲ ▲ = copy lệnh **A**
▲ ▲ = copy lệnh **B**
▲ ▲ = copy lệnh **C**

. . . .

Vậy $u_{19} = 315$
▲ ▲ = $u_{20} = -142$

. . . .
.

▲ ▲ = $u_{66} = 2777450630$
▲ ▲ = $u_{67} = -344795925$
▲ ▲ = $u_{68} = -9002867182$

Lưu ý: Giáo viên trong quá trình soạn bài dạy, có thể dùng bảng tính MS Exel để kiểm tra đáp số.

Ta tạo ra hai cột. Cột 1 (A) đánh số thứ tự từ dòng 1 đến dòng 68 (A1, A2, A3…A68)
Cột 2 (B) dòng 1 (B1) nhập số **1**
Cột 2 dòng 2 (B2) nhập số **2**

Cột 2 dòng 3 (B3) nhập số **3**

Cột 2 dòng 4 nhập công thức: $\mathbf{2 * B3 - 3 * B2 + 2 * B1}$

Từ dòng 5 đến dòng 68 copy công thức, ta sẽ được tất cảc các số hạng của dãy số.

Ví dụ 2: ***Sở Giáo dục và Đào tạo TP HCM 8/1/2012.***

Cho một dãy số (u_n) được xác định như sau:

$u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_3 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n.u_{n-1} + 1}{u_{n-2}}$ $(n \geqslant 3)$

Tính u_{11}

Cách giải tương tự như trên. Sau đây là lời giải vắn tắt.

Tính u_{11}

1 SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
1 SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**
1 SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
▭ C B + 1 ▼ A SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
▭ A C + 1 ▼ B SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**
▭ B A + 1 ▼ C SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
▲ ▲ = **11**
▲ ▲ = **26**
▲ ▲ = **41**
▲ ▲ = **97**
▲ ▲ = **153**

Vậy $u_{11} = 153$

2.5 Phép tính đạo hàm.

Phép tính đạo hàm là phép tính cơ bản trong Giải tích Toán học. Ở đây ta dùng đạo hàm để giải bài toán về tiếp tuyến, cực trị của một hàm số (trừ hàm số bậc 2 có chức năng riêng) và khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ bằng qui tắc L'Hospital.

I. Phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến tại một điểm trên đồ thị là: $y = ax + b$ với:

- $B = f(x_0)$; $a = f'(x_0)$
- $b = B - ax_0$

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$f(x) = e^{3x^2+\sqrt{x}}\sin 4x + \log_3(\sin x + 2)$$

tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{12}$

phương trình tiếp tuyến

- Chèn phép tính đạo hàm vào biểu thức đã nhập: Đóng mở ngoặc đơn biểu thức đã nhập, đưa con trỏ về đầu biểu thức, bấm vào SHIFT DEL ($\frac{d}{dx}$▮) di chuyển con trỏ đến cuối bấm tiếp SHIFT SHIFT ×10^x (π) ÷ 12 = SHIFT RCL (STO) (−) (A) 9.008014756

phương trình tiếp tuyến

- Tính b: F − SHIFT SHIFT ×10^x (π) ▭ 12 ▶ A = 0.1577672473

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm (làm tròn tới 4 số lẻ thập phân) là:

$$y = 9.0080x + 0.15778$$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2x+5}}{x^2+1}$$

tại điểm có hoành độ $x = 1-\sqrt{5}$

GIẢI

Tương tự như Ví dụ 1.

1. Nhập biểu thức lên màn hình:

$$\frac{\sqrt{4x^2+2x+5}}{x^2+1}$$

Bấm vào CALC và nhập $x = 1-\sqrt{5}$ kết quả ta nhận được giá trị của hàm số tại $x = 1-\sqrt{5}$ là **1.162749264**, lưu vào F.

2. Bấm ◀ đưa con trỏ lên, bấm) ▶ (◀ SHIFT DEL SHIFT ∫ ($\frac{d}{dx}$▮) ◀ ◀ ◀ 1 − √▮ 5 = **0.606239801** lưu vào A.

tiếp theo

3. Tính [B] như sau: [ALPHA] [tan] **(F)** [−] [A] [(] [1] [−] [√■] [5] [▶] [)] [=] **1.912132755**

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm (làm tròn đến 4 số lẻ thập phân sau dấu phẩy) là:

$$y = 0.6062x + 1.9121$$

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 3$. Viết phương trình các tiếp tuyến đi qua điểm $A(-2;6)$.
*(Viết kết quả dưới dạng **đúng** (số vô tỉ), không thay bằng gần đúng).*

GIẢI

Phương trình xác định hoành độ tiếp điểm (HĐTĐ) của các tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ là:

$$f(x) - f'(x)(x - x_0) - y_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^3 - 9x^2 + 17x + 3 - (3x^2 - 18x + 17)(x + 2) - 6 = 0$$

Nhập phương trình bậc 3 không thu gọn

[(] [X] [x^3] [−] [9] [X] [x^2] [+] [1] [7] [X] [+] [3] [−] [(] [3] [X] [x^2] [−] [1] [8] [X] [+] [1] [7] [)] [(] [X] [+] [2] [)] [−] [6] [)] [=]

Tìm nghiệm x_1

SHIFT CALC (SOLVE) 0 = 1 SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Tìm nghiệm x_2

▲ ◀ ▭ X − A SHIFT CALC (SOLVE) =
= 4.558421985 SHIFT RCL (STO) °'" (B)

Tìm nghiệm x_3

▲ ▲ ◀ ▭ (X − A) (X −
B) SHIFT CALC (SOLVE) = = = -4.058421985
SHIFT RCL (STO) hyp (C)

đổi x_2, x_3 sang số vô tỉ

MODE 5 3 1 = − (B + C = B
C = $\frac{1+3\sqrt{33}}{4}$ SHIFT RCL (STO) sin (D)
= $\frac{1-3\sqrt{33}}{4}$ SHIFT RCL (STO) cos (E)

Dựa vào kết quả trên MTCT, học sinh sẽ viết phương trình tương đương của phương trình HĐTĐ là:

$$(x-1)\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{37}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ 2x^2-x-37 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ x & = & \dfrac{1+3\sqrt{33}}{4} \\ x & = & \dfrac{1-3\sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến cho bởi:

$$k = 3x^2 - 18x + 17 = 3\left(\frac{x+37}{2}\right) - 18x + 17 = \frac{145}{2} - \frac{33}{2}x$$

Khi đó: $x = \dfrac{1 \pm 3\sqrt{33}}{4} \Longrightarrow k = \dfrac{145}{2} - \dfrac{33}{2} \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{33}{2}\left(\pm\dfrac{3\sqrt{33}}{4}\right)$

(tách riêng phần vô tỉ ra không để MTCT tính gần đúng).

Vậy phương trình ba tiếp tuyến đi qua A là:

$$\begin{array}{l} y = 2x + 10 \\ y = \dfrac{547+99\sqrt{33}}{8}x + \dfrac{1142+198\sqrt{33}}{8} \\ y = \dfrac{547-99\sqrt{33}}{8}x + \dfrac{1142-198\sqrt{33}}{8} \end{array}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x+3}$ (C) và điểm $A(-3;0)$.

1. Tìm hoành độ tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ A đến đồ thị (C) *(Viết kết quả dưới dạng* ***đúng*** *(số vô tỉ), không thay bằng gần đúng).*

2. Lập phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm A (với các hệ số gần đúng) đến đồ thị (C) của hàm số.

GIẢI

Câu 1.

Phương trình xác định hoành độ tiếp điểm (HĐTĐ) của các tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ là:

$$f(x) - f'(x)(x - x_0) - y_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2 - 2x + 3)(2x + 3) - (2x^2 + 6x - 12)(x + 3) = 0$$

Đây là phương trình bậc hai, do đó ta bấm máy tính tìm hai nghiệm của phương trình này (không thu gọn).

nhập và lưu phương trình

((X x^2 − 2 X + 3) (2 X + 3) − (2 X x^2 + 6 X − 1 2) (X + 3)) =

tìm nghiệm x_1

◀ SHIFT CALC **(SOLVE) 0** = **1.644008863** SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

tìm nghiệm x_2

▲ ◀ ▭ X − A SHIFT CALC **(SOLVE)** = = **−2.105547324** SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**

đổi x_1, x_2 sang số vô tỉ

MODE 5 3 1 = − (A + B) = A B

= = $\frac{-3+3\sqrt{66}}{13}$ SHIFT RCL (STO) cos (E)

= $\frac{-3-3\sqrt{66}}{13}$ SHIFT RCL (STO) tan (F)

Về phía học sinh, lời giải sẽ như sau:

Phương trình xác định hoành độ tiếp điểm (HĐTĐ) của các tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ là:

$$f(x) - f'(x)(x - x_0) - y_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2 - 2x + 3)(2x + 3) - (2x^2 + 6x - 12)(x + 3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 13x^2 + 6x - 45 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & \frac{-3+3\sqrt{66}}{13} \\ x & = & \frac{-3-3\sqrt{66}}{13} \end{array}\right.$$

(chú ý tổng và tích của hai nghiệm)

Câu 2.

Ta có hai tiếp tuyến với hệ số góc tương ứng xác định như sau:

Đạo hàm tại x_1 và x_2

($\frac{d}{dx}$▮) [▭] [X] [x^2] [−] [2] [X] [+] [3] [▼] [2] [X] [+] [3]
[▶] [▶] [A] [=] **0.0827** [×] [3] [=] **0.2481** (làm tròn)
[▲] [◀] [◀] [DEL] [B] [=] **−10.7494** [×] [3] [=] **-32.2481**
(làm tròn)

Vậy phương trình hai tiếp tuyến cần tìm *(làm tròn tới 4 số lẻ thập phân sau dấu phẩy)* là:

$$y = 0.0827x + 0.2481$$
$$y = -10.7494x - 32.2481$$

II. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

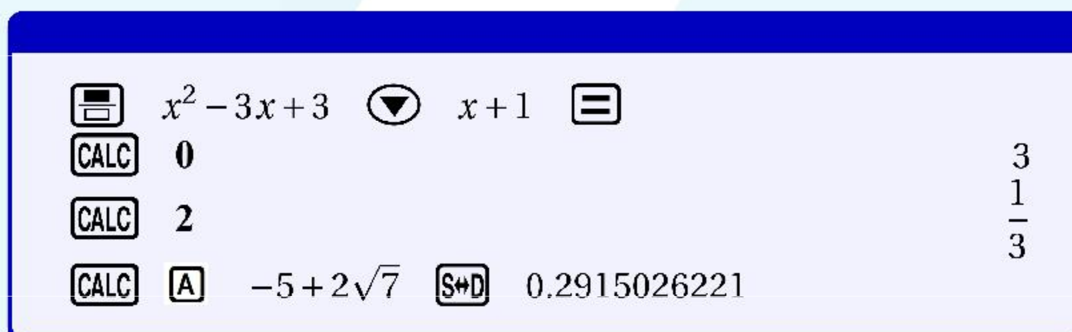
$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x + 1}$$

trên đoạn $[0;2]$.

Giải: Tìm cực trị và giá trị cực trị:

[MODE] [5] [3] **1** [=] **2** [=] [(−)] **3** [−] **3** [=]
[=] $-1+\sqrt{7}$ [SHIFT] [RCL] **(STO)** [(−)] **(A)**
[=] $-1-\sqrt{7}$ (loại)

Sau đó trở ra [MODE] [1] nhập hàm số:



Vậy GTNN của hàm số là $-5+\sqrt{7}$ và GTLN là 3.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = Mx + N \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

trong đó $b^2 - 4ac > 0$ và $a < 0$.

GIẢI

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$. Tập xác định của hàm số là $[x_1; x_2]$.

$$y' = 0 \Longleftrightarrow M \pm \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = 0$$

Khai triển và thu gọn, ta có phương trình bậc hai:

$$\mathbf{4M^2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=0}$$

Nếu đối chiếu với các điều kiện, phương trình này có tối đa hai nghiệm, do đo ta bấm máy tính tìm các nghiệm của nó mà không cần thu gọn thành phương trình bậc hai.
Từ đây bằng cách tìm các giá tri cực trị và giá trị tại hai đầu mút của tập xác định ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 6: Bộ Giáo dục và Đào tạo 10/3/2012. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2 - 3x - \sqrt{5x - x^2 + 4}$$

GIẢI

Tập xác định của hàm số:

MODE 5 3 (−) 1 = 5 = 4 = = $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$
SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
= $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**

Vậy $D = \left[\frac{5-\sqrt{41}}{2}; \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right]$

Nhập biểu thức sau vào một cặp dấu đóng mở ngoặc đơn và lưu vào màn hình bằng cách nhấn dấu =:

$$\left(36(5x - x^2 + 4) - (5 - 2x)^2\right)$$

◀ SHIFT CALC **(SOLVE) 0** = -0.5372685097 SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

▲ ◀ ▭ X − C SHIFT CALC **(SOLVE)** == 5.53726851
SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

Nếu muốn biết nghiệm vô tỉ của phương trình bậc hai này, ta bấm

MODE 5 3 1 = (−) (C + D) = C D = =

Tìm các cực trị:

$\dfrac{50+3\sqrt{410}}{20}$ SHIFT RCL (STO) cos (E)

= $\dfrac{50-3\sqrt{410}}{20}$ SHIFT RCL (STO) tan (F)

Tìm các giá trị

Nhập biểu thức sau lên màn hình:

$$2-3x-\sqrt{5x-x^2+4}$$

CALC A = $-\dfrac{11+3\sqrt{41}}{2}$ S⇔D -15.10468636

CALC B = $\dfrac{-11+3\sqrt{41}}{2}$ S⇔D 4.104686356

Tìm các giá trị

CALC E = $-\dfrac{11+\sqrt{410}}{2}$ S⇔D -15.62422837

CALC F = $\dfrac{-55+4\sqrt{410}}{10}$ S⇔D 2.599382693

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là:

$M=\dfrac{-11+3\sqrt{41}}{2}\approx 4.1047$

và giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

$m=-\dfrac{11+\sqrt{410}}{2}\approx -15.6242$

Bài tập tương tự. $y=2x+3+\sqrt{3x-x^2+2}$

ĐS: $M = 10,6098$; $m = 1,8769$

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

trong đó $a' \neq 0$ và $b'^2 - 4a'c' < 0,\ ab' - a'b \neq 0$.

GIẢI

Ta có:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \iff (a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0$$

Nếu $y = \dfrac{a}{a'}$, phương trình có nghiệm vì $ab' - a'b \neq 0$. Ngược lại phương trên là một phương trình bậc hai. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c) \geqslant 0$$

$\iff (b'^2 - 4a'c')y^2 + \big(4(ac' + 4a'c) - 2bb'\big)y + b^2 - 4ac \geqslant 0$

Chú ý: Hệ số của y^2 là biệt thức của mẫu, hệ số tự do là biệt thức của tử, còn hệ số của y, người đọc tự tìm hiểu.

Giải bất phương trình bậc hai này trên MTCT ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 7. Chọn đội tuyển TP HCM 19/01/2014. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{1,4x - 5,3}{3,7x^2 + 0,2x + \sqrt{3}}$$

GIẢI

Ta có:

$$y = \frac{1,4x-5,3}{3,7x^2+0,2x+\sqrt{3}} \Longleftrightarrow (3,7y)x^2+(0,2y-1,4)x+y\sqrt{3}+5,3=0$$

Nếu $y=0$ phương trình có nghiệm $x=\frac{53}{14}$. Ta xét $y \neq 0$.

$\Delta_m = 0,2^2 - 4 \times 3,7\sqrt{3}$ S⇔D -25.59435195

SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

$\Delta_t = 1,4^2$ S⇔D 1.96

SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

$4(-5,3\times 3,7)-2(1,4\times 0,2)=-79$ SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $Ay^2+By+C \geqslant 0$

Giải bất phương trình bậc 2

MODE ▼ 1 1 3 A = B = C = =

$-3.111232338 \leqslant y \leqslant 0.0246138465$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M = 0.0246$
và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = -3.1112$.

III. Sử dụng qui tắc L'Hospital

Ví dụ 7: Sử dụng qui tắc L'Hospital khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3+8x^2+24}-\sqrt{x^2+3x+6}}{x^2-3x+2}$

GIẢI

Giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên áp dụng qui tắc L'Hospital ta có:

qui tắc L'Hospital

[=] [SHIFT] [∫] ($\frac{d}{dx}$▮) ($\sqrt[3]{▮}$) [X] [x^3] [+] [8] [X] [x^2] [+] [2] [4] [▶]

[−] [$\sqrt{▮}$] [X] [x^2] [+] [3] [X] [+] [6] [▶] [▶] [2] [▼] [SHIFT] [∫] ($\frac{d}{dx}$▮) [X] [x^2] [−] [3] [X] [+] [2] [▶] [2] [=] **0.04166666667**

Đổi sang số hữu tỉ: **0.041(6)** = $\frac{1}{24}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3+8x^2+24}-\sqrt{x^2+3x+6}}{x^2-3x+2} = \frac{1}{24}$

2.6 Điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

Ta xét trường hợp $a' \neq 0$ và $b'^2 - 4a'c' < 0$.
Ta có:

$$y' = \frac{Ax^2+Bx+C}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

với $A = ab' - a'b$, $B = 2(ac' - a'c)$,$C = bc' - b'c$.

Để tìm các điểm uốn của đồ thi ta giải phương trình $y'' = 0$

$\iff \mathbf{(2Ax+B)(a'x^2+b'x+c') - 2(2a'x+b')(Ax^2+Bx+C) = 0}$

Đây là phương trình bậc 3, không cần thu gọn ta vẫn tìm được 3 nghiệm của nó (trong trường hợp nó có ba nghiệm).

Khai triển và thu gọn:

$\Longleftrightarrow 2a'Ax^3+3a'Bx^2+6a'Cx+2b'C-c'B=0$

Ta bấm máy tính MODE 5 4 để giải phương trình bậc 3.

Tìm được hoành độ điểm uốn, bằng cách bấm CALC ta tìm được tung độ điểm uốn.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2+x+1}$. Tìm các điểm uốn của đồ thị hàm số.

GIẢI

$$y'=\frac{5x^2-6x-8}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y''=\frac{(10x-6)(x^2+x+1)-2(2x+1)(5x^2-6x-8)}{(x^2+x+1)^3}.$$

$$y''=0\Longleftrightarrow(10x-6)(x^2+x+1)-2(2x+1)(5x^2-6x-8)=0$$

$$\Longleftrightarrow 10x^3-18x-48x-10=0\Longleftrightarrow 5x^3-9x-24x-5=0$$

Điểm uốn

MODE 5 4 5 = (−) 9 = (−) 2 4 = (−) 5 =
= **3.331090696** SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
= **−0.230888723** SHIFT RCL **(STO)** °′″ **(B)**
= **−1.300201973** SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
MODE 1 Nhập biểu thức lên màn hình:

$$\frac{2x^2-3x+5}{x^2+x+1}$$

Điểm uốn

CALC A = **1.11484884** SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

CALC B = **7.051481205** SHIFT RCL **(STO)** cos **(E)**

CALC C = **8.833669955** SHIFT RCL **(STO)** tan **(F)**

Vậy đồ thị hàm số có ba điểm uốn là:

$$A(3.3311;1.1148)\ ,B(-0.2309;7.0515)\ ,C(-1.3002;8.8337)$$

Nhận xét: Ba điểm uốn này thẳng hàng trên đường thẳng:

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\dfrac{-3x+5}{x^2+x+1}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số có ba điểm uốn thẳng hàng.

GIẢI

Giải tương tự như ví dụ trên với:

$$y''=\frac{-6x^3+30x^2+48x+6}{(x^2+x+1)^3}$$

dẫn đến phương trình bậc 3:

$$-x^3+5x^2+8x+1=0$$

Điểm uốn

MODE 5 4 (−) 1 = 5 = 8 = 1 =

= **6.295896943** SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

= **-0.1370633395** SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**

= **−1.158833604** SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

Điểm uốn

MODE 1 Nhập biểu thức lên màn hình:

$$\frac{-3x+5}{x^2+x+1}$$

CALC A = **-0.2958969432** SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

▲ CALC B = **6.13706334** SHIFT RCL **(STO)** cos **(E)**

▲ CALC C = **7.158833604** SHIFT RCL **(STO)** tan **(F)**

Chứng minh ba điểm uốn thẳng hàng

MODE 6 1 5 (Sử dụng MODE MATRIX)
B − A = E − D = (Nhập toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$)
C − A = F − D = (Nhập toạ độ vectơ $\overrightarrow{AC}$)
AC SHIFT 4 7 SHIFT 4 3) = **0** (Tính định thức det(MatA) = 0

Vecto $\overrightarrow{AB} = (-6.432960283; 6.432960283)$ do đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua ba điểm này là $\overrightarrow{n} = (1;1)$.

Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng trên đường thẳng $x + y - 6 = 0$.

Nhận xét: Vì việc chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng dựa vàp các số liệu được MTCT cung cấp và là các số gần đúng nên ở đây ta

muốn kiểm tra lại độ chuẩn xác của kết quả nói trên bằng việc tính toán trực tiếp dựa vào giả thiết đã cho, không dựa vào toạ độ của các điểm uốn tìm được.

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm uốn.

Ta có toạ độ điểm uốn thoả mãn phương trình:

$$-x^3+5x^2+8x+1=(-x+6)(x^2+x+1)+3x-5$$

$\Longrightarrow -3x+5=(-x+6)(x^2+x+1)$

Vậy $y_0=\dfrac{-3x_0+5}{x_0^2+x_0+1}=\dfrac{(-x_0+6)(x_0^2+x_0+1)}{x_0^2+x_0+1}=-x_0+6$

Do đó phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là:

$$y=-x+6$$

Nhận xét: Nếu đồ thị hàm số:

$$y=d.\frac{x+a}{(x+b)^2+c^2}$$

có ba điểm uốn (tuỳ theo giá trị của a, b, c, d với sự trợ giúp của MTCT) thì ba điểm uốn này thẳng hàng. Phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là:

$$y=\frac{d(x+3a-2b)}{4c^2}$$

(Thừa số d được bảo lưu.)

Do đó cũng đúng trong trường hợp tổng quát có dạng:

$$y = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$$

trong đó $\Delta = d^2 - 4ce < 0$ là biệt thức của mẫu.

Áp dụng công thức đã xây dựng, ta có phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là:

$$y = -\frac{1}{\Delta}\left(acx + 3bc - ad\right)$$

Ví dụ: $y = \dfrac{2x+3}{4x^2+5x+6}$

Ở đây $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 6$ suy ra $\Delta = -71$.
Do đó dự đoán phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là:

$$y = \frac{8}{71}x + \frac{26}{71}$$

Tính trực tiếp với sự trợ giúp của MTCT.

$$y'' = \frac{64x^3 + 288x^2 + 72x - 114}{(4x^2+5x+6)^3}$$

Bấm máy tính giải phương trình bậc ba:

$$64x^3 + 288x^2 + 72x - 114 = 0$$

giải phương trình bậc ba

MODE 5 4 6 4 = 2 8 8 = 7 2 =
(−) 1 1 4 = =

ta được ba nghiệm:

$x_1 = -4.122270245$, $x_2 = 0.4950752313$,
$x_3 = -0.8728049865$.
Vậy đồ thị hàm số có ba điểm uốn. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm uốn.
Thực hiện phép chia đa thức tìm thương và dư ta có:
$64x^3 + 288x^2 + 72x - 114 = (16x + 52)(4x^2 + 5x + 6) - 142(2x + 3)$

Suy ra: $2x_0 + 3 = \dfrac{(8x_0 + 26)(4x_0^2 + 5x_0 + 6)}{71}$

Suy ra: $y_0 = \dfrac{1}{71}(8x_0 + 26)$
Vậy phương trình đường thẳng đi qua ba điểm uốn là:

$$8x - 71y + 26 = 0$$

Lưu ý: Có thể ta không cần giải phương trình bậc 3 (vì ra nghiệm thập phân) mà ta chỉ cần chứng minh phương trình có ba nghiệm. MTCT sẽ trợ giúp như sau:

Chứng minh phương trình bậc 3 có ba nghiệm

Nhập biểu thức lên màn hình:

$$\mathbf{64x^3 + 288x^2 + 72x - 114}$$

CALC (–) 5 = $-1274 < 0$
CALC (–) 1 = $38 > 0$
CALC 0 = $-114 < 0$
CALC 1 = $310 > 0$

(các số được chọn được gợi ý từ nghiệm đã liệt kê của phương trình nói trên)

Vậy phương trình $y'' = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba điểm uốn.

Tổng quát cho hàm số: $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$

Cho hàm số: $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$ với điều kiên $a' \neq 0$ và $\Delta = b'^2 - 4a'c' < 0$ (gọi là biệt thức của mẫu).

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm uốn và ba điểm uốn này thẳng hàng trên đường thẳng:

$$y = \frac{A}{\Delta}x + \frac{bb' - ac' - 3a'c}{\Delta}$$

trong đó Δ là biệt thức của mẫu và $A = ab' - a'b$.

2.7 Cực trị của hàm số bậc 2

Nhiều bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất dẫn đến tìm cực trị của hàm số bậc hai. Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số ứng dụng như thế. Với công cụ này, học sinh sẽ tiết giảm nhiều khâu trong việc giải bài toán.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta : x+2y-3=0$, hai điểm $A(1;0), B(3;-4)$. Hãy tìm trên Δ điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Giải: Giả sử $M(-2y+3;y) \in \Delta$. Khi đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{80y^2+64y+148}$$

Hàm số $f(y) = 80y^2 + 64y + 148$ có tập xác định $\mathbb{R}$, đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{676}{5}$ tại $y = -\frac{2}{5}$.

MODE 5 3 80 = 64 = 148 = = (gõ nhiều lần dấu = cho đến khi xuất hiện

X-Value Minimum=
$-\frac{2}{5}$

gõ tiếp dấu = để có **Y-Value Minimum**.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y = -\frac{2}{5}$. Vậy điểm M cần tìm là $M\left(\frac{19}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C).

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $k_1; k_2$ lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$2x^2 + 2mx - m - 1 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Ta tính được: $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6$

Hàm số $g(m) = -4m^2 - 8m - 6$ xác định với mọi m, đạt giá trị lớn nhất là -2 khi $m = -1$.

X-value Maximum=
-1

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $m = -1$.

Ví dụ 3: Tìm GTNN của $A = 5x^2 + 9y^2 + 24x - 12xy - 48y + 82$

Giải:

$$A = 9\left(y - \frac{12}{18}x - \frac{48}{18}\right)^2 - 9\left(\frac{12}{18}x + \frac{48}{18}\right)^2 + 5x^2 + 24x + 82$$

Tới giai đoạn bấm máy tính:

[MODE] [5] [3] [(−)] [9] [×] [1] [2] [x^2] [$\frac{\square}{\square}$] [1] [8] [x^2] [+] [5] [=]
[(−)] [9] [×] [2] [×] [1] [2] [$\frac{\square}{\square}$] [1] [8] [×] [4] [8] [$\frac{\square}{\square}$] [1] [8] [+] [2] [4] [=]
[(−)] [9] [×] [4] [8] [x^2] [$\frac{\square}{\square}$] [1] [8] [x^2] [+] [8] [2] [=]

gõ nhiều lần dấu [=] đến khi xuất ra thông báo X-Value Minimum = 4 [=]
Y-Value Minimum = 2
Nghĩa là $A \geqslant 2$; xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x = 4$ và do đó $y = \frac{16}{3}$.
Do đó lời giải của học sinh như sau:

Ta có: $A = 5x^2 + 9y^2 + 24x - 12xy - 48y + 82$

$$A = 9\left(y - \frac{12}{18}x - \frac{48}{18}\right)^2 - 9\left(\frac{12}{18}x + \frac{48}{18}\right)^2 + 5x^2 + 24x + 82$$

$$A = 9\left(y - \frac{12}{18}x - \frac{48}{18}\right)^2 + \left(5 - \frac{9.12^2}{18^2}\right)(x-4)^2 + 2 \geqslant 2$$

Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x = 4; y = \frac{12}{18}x + \frac{48}{18} = \frac{16}{3}$

Vậy GTNN của A là 2 đạt được khi $x = 4, y = \frac{16}{3}$.

TOÁN NHANH.

Thu gọn phương trình:

$$\left(5 - \frac{x-4}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{-2x+3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x+13}{2}\right)^2$$

GIẢI.

Đặt $f(x) = \text{VT} - \text{VP}$

Ta có nhận xét phương trình trên thu gọn thành phương trình bậc nhất, do đó $f(x) = ax + b$ với $b = f(0)$, $a = f'(0)$.

Ta thực hiện trên MTCT như sau:

TOÁN NHANH

Nhập biểu thức lên màn hình trong một cặp dấu đóng mở ngoặc đơn:

$$\left(\left(5 - \frac{x-4}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{-2x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x+13}{2}\right)^2\right)$$

và nhấn dấu [=] để lưu biểu thức lên màn hình.

[CALC] [0] [=] 33

[◀] [▶] [SHIFT] [DEL] [SHIFT] [∫□] ($\frac{d}{dx}$■) [◀] [◀] [◀] [0] [=] -33

Vậy phương trình đã cho trở thành: $-33x + 33 = 0$

BÀI TOÁN CÓ CÁCH GIẢI LẠ.

Cho hàm số $y=\frac{3}{8}x^3+7x^2-\frac{6}{11}x+9$. Ta thấy ngay hàm số này có hai điểm cực trị. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó.

GIẢI.

Ta có:

$$y-\frac{y'.y''}{18}=Ax+B$$

trong đó $Ax+B$ là dư của phép chia y cho y'.

Do đó ta viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị như sau:

đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Nhập biểu thức:

$$\frac{3}{8}x^3+7x^2-\frac{6}{11}x+9-\frac{1}{18}\left(\frac{9}{8}x^2+14x-\frac{6}{11}\right)\left(\frac{9}{4}x+14\right)$$

CALC 0 = $\frac{16}{3}$ SHIFT RCL **(STO)** °‚‚‚ **(B)**

CALC 1 = − B = $-\frac{14}{9}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là:

$$y=-\frac{14}{9}x+\frac{16}{3}$$

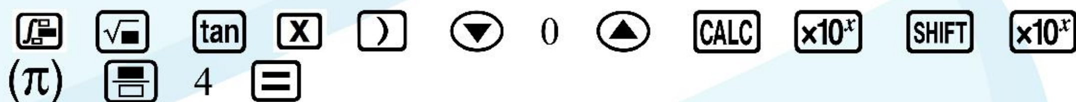
CHƯƠNG 3

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS TRONG CHƯƠNG TRÌNH LỚP 12

3.1 Phép tính tích phân

Việc tính tích phân với kết quả gần đúng thường dùng trong các ngành khoa học thực nghiệm. Đối với bậc học phổ thông, việc tính tích phân còn dùng để kiểm tra lại kết quả tính toán chính xác bằng các phương pháp tích phân.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}dx$





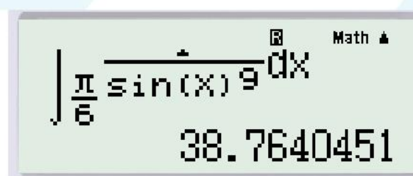
So sánh với Maple

$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

Kiểm tra lại với máy tính CASIO 570VN Plus , ta có đúng kết quả như trên.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^9 x}$

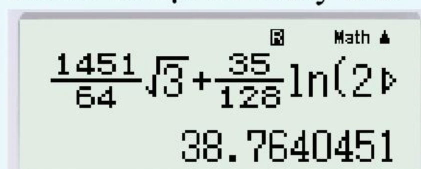
[∫] 1 [▭/▭] [sin] [X] [)] [x^■] 9 [▼] [SHIFT] [×10^x] [SHIFT] [×10^x] (π) [▭/▭] 6 [▲] [CALC] [×10^x] [SHIFT] [×10^x] (π) [▭/▭] 3 [=]



So sánh với Maple

$$I = \frac{1451}{64}\sqrt{3} + \frac{35}{128}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{1235}{1728} - \frac{35}{256}\ln(3)$$

Kiểm tra lại với máy tính CASIO 570VN Plus



Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\int_1^x e^{-t^2} dt = x$$

Trước hết, ta có nhận xét rằng đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt - x$$

là $f'(x) = e^{-x^2} - 1 < 0$ do đó phương trình nếu phương trình

$f(x) = 0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Sau đó ta sẽ gán 1 cho [Ans] và tính bấm máy tính để tính

$$\int_1^M e^{-x^2} dx$$

thực hiện liên tục cho đến khi nào kết quả không đổi nghĩa là:

$$\int_1^M e^{-x^2} dx = M$$

Khi đó $x =$ [Ans] là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Giải phương trình f(x) = x

1 [Ans]
[∫] [CALC] [ln] [(−)] [ALPHA] [X] [x^2] [▼] **1** [▲] [Ans]
[=] [=] … [=] **…x = −1.613080626**

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = |2x - 7| + 1 \ ; y = |x^2 - 4x| \ ; x = -1; x = 2$$

GIẢI

Diện tích hình phẳng tạo thành cho bởi công thức:

$$S = \int_{-1}^{2} \left| |2x - 7| + 1 - |x^2 - 4x| \right| dx$$

Diện tích hình phẳng

[∫] [Abs] [2] [X] [−] [7] [▶] [+] [1] [−] [Abs]
[X] [x^2] [−] [4] [X] [▼] [−] [1] [▼] [2] [=]
13.33333296

So với giá trị đúng là $\frac{40}{3} = 13.33333333$

3.2 Dùng máy tính kiểm tra tính đúng đắn của một số công thức mới

Máy tính cầm tay là công cụ hữu ích để kiểm chứng một số nghiên cứu cá nhân trong quá trình soạn bài dạy cho học sinh 12. Ví dụ:

> Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi hàm số có hai điểm cực trị, hãy thiết lập công thức tìm khoảng cách giữa hai điểm cực trị theo a, b, c, d.

Giải: Hoành độ của điểm cực trị (nếu có) là nghiệm của phương trình:

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Đặt $\Delta' = b^2 - 3ac$ (lưu ý $a, b.c$ là hệ số của hàm số bậc 3, không phải của phương trình bậc 2.)

Vì $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{3a}$ suy ra $|x_1 - x_2| = \dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{3|a|}$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là:

$$y = kx + \beta$$

(chỉ quan tâm tới hệ số góc $k = -\dfrac{2.(b^2 - 3ac)}{9a}$, còn β không quan tâm dù biết rằng $\beta = d - \dfrac{bc}{9a}$.)

Khi đó khoảng cách d giữa hai điểm cực trị xác định bởi:

$$d^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (k^2 + 1)(x_2 - x_1)^2$$

Vậy:

$$d^2 = \left[1 + 4\left(\frac{b^2 - 3ac}{9a}\right)^2\right] \times \frac{4}{a}.\frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

Đặt $e = \dfrac{b^2 - 3ac}{9a}$ ta có công thức (chỉ để tham khảo):

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số bậc 3

$$d = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}$$

với $e = \dfrac{b^2 - 3ac}{9a}$ và nói thêm, hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $k = -2e$.

Ví dụ 1:

Áp dụng công thức vào bài toán: $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$

1 SHIFT RCL **(STO)** (–) **(A)**
(–) 4 SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**
3 SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
(–) 5 SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

Áp dụng công thức vào bài toán: ***(tiếp theo)***

▭/▭ B x^2 – 3 A C ▼ 9 A SHIFT RCL **(STO)** cos **(E)**
√▭ ▭/▭ 4 E + 1 E CALC x^2 ▼ A =
3.261783534

Lưu ý: Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số là

$$d = \sqrt{\frac{7756}{729}} = 3.261783534$$

Vấn đề chính ở đây là máy tính đã tính chính xác giá trị này với (sự hiển thị) *9 chữ số thập phân sau dấu phẩy.*

Ví dụ 2: (Sở Giáo dục và Đào tạo Thừa Thiên-Huế, THPT, 01.12.2007)

1. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2007$. Xác định a, b, c sao cho $f(x)$ chia cho $x - 16$ có số dư là 29938 và chia cho $x^2 - 10x + 21$ được đa thức dư là $\frac{10873}{16}x - 3750$ (kết quả lấy chính xác).
2. Tìm khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)$ với các giá trị a, b, c vừa tìm được.

GIẢI

1. Theo đề bài ta biết a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16^3a + 16^2b + 16c &= 29938 + 2007 \\ 3^3a + 3^2b + 3c &= \dfrac{10873}{16} \times 3 - 3750 + 2007 \\ 7^3a + 7^2b + 7c &= \dfrac{10873}{16} \times 7 - 3750 + 2007 \end{cases}$$

Bấm máy tính giải hệ phương trình và lưu nghiệm vào A, B, C. Cụ thể $a = 7$, $b = 13, c = -3.4375$

Ta muốn đổi c ra số hữu tỉ vì:

$$16c = 29938 + 2007 - 16^3 a - 16^2 b \Longleftrightarrow c = -\frac{55}{16}$$

Để tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị, ta áp dụng công thức:

$$d = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}$$

$$\text{với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị

Với A, B, C đã lưu, ta tính E

[frac] B [x²] [−] 3 A C [▼] 9 A SHIFT RCL **(STO)** [cos] **(E)**

[√■] [frac] 4 E [+] 1 6 E [x³] [▼] A [=]

11.42102447

Bài tập tương tự. Bộ Giáo dục và Đào tạo. 13/3/2007

Tìm hàm số bậc 3 đi qua các điểm $A(-4;3), B(7;5), C(-5;6)$, $D(-3;-8)$ và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của nó.

ĐS : $a = \frac{563}{1320}, b = \frac{123}{110}, c = -\frac{25019}{1320}, d = -\frac{1395}{22}$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: **105,1791.**

Hướng dẫn:

$\frac{563}{1320}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

$\frac{123}{110}$ SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**

$-\frac{25019}{1320}$ SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

$-\frac{1395}{22}$ SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

▭ B x^2 − 3 A C ▼ 9 A SHIFT RCL **(STO)** cos **(E)**

√▭ ▭ 4 E + 1 6 E x^3 ▼ A =

105.1791174

Thêm một lần nữa, ta có cơ sở để khẳng định tính đúng đắn của công thức được thiết lập ở trên.

Ví dụ 3: Tìm hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-x+1}$

Giải phương trình $y'=0$:

MODE 5 3

(−) 2 + 1 5 = 2 (2 − 9) = (−) 5 + 3 =

Giải phương trình $y' = 0$:

= $x_1 = \dfrac{7+5\sqrt{3}}{13}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

= $x_2 = \dfrac{7-5\sqrt{3}}{13}$ SHIFT RCL **(STO)** °,,, **(B)**

Giá trị cực cực trị:

Nhập biểu thức $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-x+1}$ lên màn hình.

CALC A = 0.02913709779 SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

CALC B = 3.120046189 SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị:

√■ (B − A) x^2 + (D − C) x^2 = 3.41943026

Nhận xét: Thông qua máy tính cầm tay, ta có thể kiểm tra lại một số công thức do các nghiên cứu cá nhân (của học sinh chẳng hạn) để có thể bác bỏ hoặc khẳng định tính đúng đắn của nghiên cứu đó. Ví dụ:

> Cho hàm số: $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. Trong trường hợp hàm số có hai điểm cực trị, hãy thiết lập công thức tính khoảng cách của hai điểm cực trị đó. *(không xét các trường hợp suy biến)*

Có thể học sinh sẽ thiết lập công thức tính khoảng cách của hai điểm

cực trị đó như sau:

$$y' = 0 \Longleftrightarrow (ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + bc' - b'c = 0$$

Khi đó tung độ của các điểm cực trị sẽ tính như sau:

$$y_1 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'} = \frac{a}{a'} - \frac{ab' - a'b}{a'(2a'x_1 + b')}$$

$$y_2 = \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'} = \frac{a}{a'} - \frac{ab' - a'b}{a'(2a'x_2 + b')}$$

Do đó: $y_1 - y_2 = \dfrac{2(ab' - a'b)(x_1 - x_2)}{4a'^2x_1x_2 + 2a'b'(x_1 + x_2) + b'^2}$

Thay $x_1x_2 = \dfrac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$ và $x_1 + x_2 = \dfrac{-2(ac' - a'c)}{ab' - a'b}$ vào đẳng thức, ta có:

$$y_1 - y_2 = \frac{2(ab' - a'b)(x_1 - x_2)}{b'^2 - 4a'c'}$$

Gọi Δ_2 là biệt thức của mẫu số trong hàm số đã cho, A là hệ số nguyên thuỷ của x^2 trong phương trình bậc hai $y' = 0$ ở trên (nghĩa là hệ số ban đầu khi chưa đơn giản hoặc đổi dấu (nếu có)) và d là khoảng cách giữa hai điểm cực tri, ta có:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 \left[1 + \frac{4A^2}{\Delta_2^2}\right]$$

Suy ra:

$$d = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \frac{4A^2}{\Delta_2^2}}$$

mà $|x_1 - x_2| = \dfrac{2\sqrt{\Delta_1}}{|A|}$ với Δ_1 là **biệt thức thu gọn** nguyên thuỷ của phương trình bậc hai $y' = 0$.

Vậy

$$d = 2\sqrt{\Delta_1} \cdot \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{4}{\Delta_2^2}}$$

Tóm lại:

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số bậc 2 trên bậc 2:

$$d = \sqrt{\frac{4\Delta_1}{A^2} + \frac{16\Delta_1}{\Delta_2^2}}$$

Nhận xét: Sau đây ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay để **kiểm tra** tính đúng đắn của công thức trên.

Hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - x + 1}$.

$y' = 0 \Longleftrightarrow 13x^2 - 14x - 2 = 0$

$A = 13, \Delta_1 = 75, \Delta_2 = -11$

kiểm tra trên MTCT

13 SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**
75 SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**
(−) **11** SHIFT RCL **(STO)** cos **(E)**
2 √■ D ■/■ A x² ▶ + **4** D ■/■ E x²
= **3.41943026**

Nhận xét: Không phải ngẫu nhiên mà kết quả này trùng khớp với kết quả đã thực hiện ở trên (trực tiếp trên máy tính cầm tay). Kết quả này giúp ta tin rằng công thức nêu trên là đúng đắn.

3.3 Vấn đề số phức

3.3.1 Các phép tính số phức dưới dạng đại số

1. Để nhập một số phức ta vào MODE 2

   để nhập số đơn vị ảo ta bấm phím ENG

2. Các phép tính cộng, trừ nhân chia được sử dụng các phím + , − , × ÷ tương ứng trên bàn phím.

3. Phép lấy lũy thừa 2 và lũy thừa 3 của một số phức thực hiện như đối với số thực. Lưu ý trong MODE số phức, không có các lũy thừa bậc lớn hơn 3.

4. Để lấy số phức liên hợp của một số phức z, ta bấm SHIFT 2 2 rồi nhập số phức z và nhấn phím = . Để lấy mô-đun của một số phức, ta bấm SHIFT Abs nhập số phức (hoặc một biểu thức gồm các phép tính số phức) rồi nhấn phím = .

5. Lưu ý: *máy tính chỉ thực hiện việc tính toán và ra kết quả, người học (nhất là học sinh) phải biết sử dụng các kết quả này để ghi vào bài làm.*

Ví dụ 1: TSĐH A2010 NC: Cho số phức z thỏa mãn:
$\overline{z} = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của số phức $\overline{z} + iz$.

MÁY TÍNH:

MODE 2 ▭ (1 − √▭ 3 ▶ ENG)
SHIFT x^3 ▼ 1 − ENG =
SHIFT Abs Ans + ENG SHIFT 2 2 Ans) =
$8\sqrt{2}$

BÀI LÀM MODE 2:

Ta có: $(1-\sqrt{3}i)^2 = -2-2\sqrt{3}i$ (1 − √▭ 3 ▶ ENG) x^2

Do đó: $(1-\sqrt{3}i)^3 = (1-\sqrt{3}i)^2.(1-\sqrt{3}i) = -8$ Ans × (1 − ENG √▭ 3) =

Vậy: $\overline{z} = \dfrac{-8}{1-i} = -4-4i$ ▭ Ans ▼ 1 − ENG =

$\overline{z} + iz = -4-4i+i(-4+4i) = -8-8i$. Vậy: $\left|\overline{z}+iz\right| = 8\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tìm phần thực và phần ảo của số phức:

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$$

MODE 2 (▭ 1 + ENG √▭ 3 ▼ 1 +
ENG ▶) SHIFT SHIFT x^2 x^3 =
2 + 2i

Ví dụ 3: TSĐH D2012 NC: Cho số phức z thỏa mãn:

$$(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$$

Tìm mô-đun của số phức $z+1+i$

MÁY TÍNH:

MODE 2 ⊟ 7 + 8 ENG − ⊟ 2 (1 + 2 ENG) ▼ 1 + ENG ▼ 2 + ENG = SHIFT SHIFT Abs Ans + 1 + ENG = 5

BÀI LÀM MODE 2 **:**

Ta có: $\frac{2(1+2i)}{1+i}=3+i$ ⊟ 2 (1 + 2 ENG) ▼ 1 + ENG =

Vậy: $(2+i)z=7+8i-(3+i)=4+7i$ 7 + 8 ENG − Ans

$z=\frac{4+7i}{2+i}=3+2i$ ⊟ 4 + 7 ENG ▼ Ans =

Do đó: $|z+1+i|=5$ SHIFT SHIFT Abs Ans + 1 + ENG =

3.3.2 Số phức dưới dạng lượng giác

Muốn viết số phức dưới dạng lượng giác, ta tìm mô-đun và Argument của số phức đó. Ví dụ, viết số phức $z=1+i$ dưới dạng lượng giác.

chuyển sang dạng lượng giác

MODE 2 1 + ENG = SHIFT 2 3 = $\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$

Vậy $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Muốn tìm nhanh mô-đun và Argument của một số phức ta chuyển số phức sang tọa độ cực.

MODE 2 1 + ENG SHIFT 2 3 = $\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 1: Cho phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình. Viết z_1, z_2 dưới dạng lượng giác.

Bài giải:

$\Delta' = (-\sqrt{3}i)^2 + 4 = 1$

Vậy $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

1 + ENG √■ 3 SHIFT 2 3 = $2\angle\frac{\pi}{3}$

(−) 1 + ENG √■ 3 SHIFT 2 3 = $2\angle\frac{2\pi}{3}$

Vậy $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; $z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

Ví dụ 2: Hãy tìm dạng lượng giác của số phức $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

MODE 2 ▭ 1 − √■ 3 ▶ ENG ▼ 1 + ENG = SHIFT 2 3 = $\sqrt{2}\angle -\dfrac{7\pi}{12}$.

Vậy $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-7\pi}{12} + i\sin\dfrac{-7\pi}{12}\right)$

Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa số phức được thực hiện dễ dàng với máy tính CASIO 570VN Plus .

Ví dụ 3: ĐH A2013: Hãy tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1 + i)z^5$

$z = 1 + \sqrt{3}i$

SHIFT MODE 4 MODE 2

1 + √■ 3 ▶ ENG SHIFT 2 3 = $2\angle\dfrac{1}{3}\pi$

Vậy $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

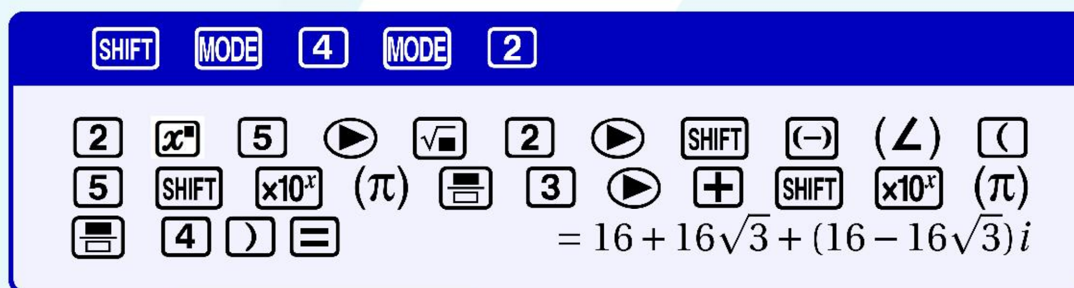
$z^5 = 2^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

SHIFT MODE 4 MODE 2

1 + ENG SHIFT 2 3 = $\sqrt{2}\angle\dfrac{1}{4}\pi$

Vậy $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Thực hành trên máy tính để tính các giá trị lượng giác, ta có:



Từ đây ta suy ra phần thực và phần ảo của w lần lượt là

$$16+16\sqrt{3} \text{ và } 16-16\sqrt{3}.$$

3.4 Một số ví dụ nâng cao

Ví dụ 1: Trong tập hợp số phức hãy tìm các số phức z và w thỏa hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (1+i)z - iw = 2+i & (1) \\ (2+i)z + (2-i)w = 2i & (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (1) cho $2-i$, phương trình (2) cho $-i$ rồi trừ hai kết quả cho nhau, ta có:

$$\Big[(1+i)(2-i)-(2+i)(-i)\Big]z = (2+i)(2-i)-(2i)(-i) \Longleftrightarrow (2+3i)z = 3$$

Vậy: $z = \dfrac{3}{2+3i} = \dfrac{6}{13} - \dfrac{9}{13}i$

$\Rightarrow w = \dfrac{2+i-(1+i)z}{-i} = -\dfrac{16}{13} + \dfrac{11}{13}i$

Ví dụ 2: Khai căn bậc hai của một số phức.

Vào MODE 2 ta nhập một số phức nhấn dấu = để lưu vào phím Ans .

Sau đó ta thực hiện các thao tác sau đây:

$$\sqrt{|\mathbf{Ans}|}\ \angle\ \frac{\mathbf{Arg(Ans)}}{\mathbf{2}}$$

Bấm phím khai căn bậc hai một số phức

√■ SHIFT Abs Ans ▶ ▶ SHIFT (−) (∠) ▭ SHIFT
2 1 Ans) ▼2 =

Ví dụ: Cho số phức $z = -80 - 192i$. Thực hành đúng thao tác trên ta có hai căn bậc hai của số phức z là $\pm(8 - 12i)$.

Ví dụ 3: Giải một phương trình bậc hai với hệ số phức.

Ví dụ ta cần giải phương trình: $z^2 - 8(1 - i) + 63 - 16i = 0$.

Ta có: $a = 1$; $b = -8 + 8i$; $c = 63 - 16i$

$\Delta = b^2 - 4ac = -252 - 64i = (2 - 16i)^2$ (khai căn bậc hai của Δ như trên)

Vậy hai nghiệm là:

$$z_1 = \frac{-b + (2 - 16i)}{2a} = 5 - 12i$$

$$z_2 = \frac{-b + (2 - 16i)}{2a} = 3 + 4i$$

Ví dụ 4: Tìm argument chính của số phức $z = 1 + \sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}$

SHIFT MODE 4 chuyển máy sang mode radian

SHIFT MODE 4 và nhập số phức:

1 + sin 3 SHIFT ×10^x (π) ▭ 5 + ENG
cos 3 SHIFT ×10^x (π) ▭ 5 =
SHIFT 2 1 Ans = $-\frac{\pi}{20}$

Vậy $\arg z = -\frac{\pi}{20}$

3.5 Phép tính vectơ trong không gian

Thực hiện các phép tính vectơ trong mặt phẳng khá đơn giản nên ở đây chúng tôi đề cập đến các phép tính vectơ trong không gian. Giả sử ta có ba vectơ :

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)\ ;\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)\ ;\ \vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$$

Ta thực hiện các phép tính sau đây:

Nhập các vectơ

MODE 8 1 1 — Nhập tọa độ vectơ $\vec{a}$
SHIFT 5 2 2 1 — Nhập tọa độ vectơ $\vec{b}$
AC

Tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$:

SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$:

SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

Ví dụ 1: Cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng:

$$\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$$

Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $BC = 8$

Bài giải:

Gọi R là bán kính mặt cầu và d là khoảng cách từ A đến Δ. Ta có:

$R^2 = d^2 + HC^2$ với H là trung điểm BC.

Δ qua $B(-2;2;-3)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;1;2)$.

$$d = (A;\Delta) = \frac{\left|[\overrightarrow{BA}, \vec{a}]\right|}{|\vec{a}|}$$

$\overrightarrow{BA} = (2;-2;1)$; $\vec{a} = (2;3;2)$

Bấm máy tính thực hiện tích có hướng

MODE 8 1 1 2 = (−) 2 = 1 =
SHIFT 5 2 2 1 2 = 3 = 2 = AC
SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

$\left[\overrightarrow{BA}, \vec{a}\right] = (-13;2;10)$

SHIFT Abs SHIFT 5 6) x^2 = 153
SHIFT Abs SHIFT 5 3) x^2 = 17

Vậy: $R^2 = \frac{\left|[\overrightarrow{BA}, \vec{a}]\right|^2}{|\vec{a}|^2} + 16 = \frac{153}{17} + 16 = 25$

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad ; \quad \Delta_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa Δ_1 và Δ_2

Bài giải:

Δ_1 qua $A(-1;-3;2)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (3;-2;-1)$

Δ_2 qua $B(2;-1;1)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{b} = (2;3;-5)$

Xét ba vectơ : $\overrightarrow{a};\overrightarrow{b};\overrightarrow{AB} = (3;2;-1)$. Ta có công thức:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right|}$$

Nhập 3 vectơ

MODE 8 1 1 3 = (−) 2 = (−) 1 =
SHIFT 5 2 2 1 2 = 3 = (−) 5 =
SHIFT 5 2 3 1 3 = 2 = (−) 1 =
AC

thực hiện phép tính

SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =
SHIFT 5 6 SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 = 52
SHIFT Abs SHIFT 5 6) = x^2 = **507**

Vậy $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{52}{\sqrt{507}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

BITEX

CÔNG TY CP XNK BÌNH TÂY

PHẦN II

GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI TNPT VÀ ĐẠI HỌC

CHƯƠNG 4

CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Các bài toán đại số thường đề cập đến các phép tính: cộng, trừ, nhân chia, luỹ thừa và khai căn thể hiện qua việc giải các phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

4.1 Vấn đề tính tổng hữu hạn

Ví dụ 1: Ta muốn tính tổng $S = \sum_{x=1}^{100} 2\frac{\sqrt{\log(x^2+1)+3}}{2^{\log x}+1}$

(Đề thi Thi giải toán trên MTCT năm 2013)

[SHIFT] [log▪□] [▭/▭] 2 [√▪] [log] [X] [x²] [+] 1 [)] [+] 3 [▼] 2 [x▪] [log] [X] [▶] [+] 1 [▼] 1 [▲] 100 [=]

123.9469195

Ví dụ 2: Tính tổng

$$S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \cdots + \frac{1}{2011.2012.2013.2014}$$

(Đề thi Thi giải toán trên MTCT năm 2011-THCS)

SHIFT log▪□ ▭ 1 ▼ X (X + 1) (X
+ 2) (X + 3) ▼ 1 ▲ 2 0 1 1 =

0.05555555551

So sánh với Maple $S = \dfrac{1359502363}{24471042552} = 0.05555555551$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tổng

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n-1}{2^n}$$

Tính S_4, S_5, S_6 ; S_{20} ; S_{25} ; S_{30}.

Bài 2. Tìm phần nguyên của tổng số sau đây:

$$\sqrt{1^3 + \frac{1^2}{3}} + \sqrt{2^3 + \frac{3^2}{5}} + \cdots + \sqrt{75^3 + \frac{149^2}{151}}$$

ĐS: 19824

4.2 Vấn đề giải phương trình

Ta xét trường hợp thường gặp là phương trình cần giải có một nghiệm duy nhất. Việc chứng minh sự duy nhất nghiệm có thể sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số hoặc vẽ đồ thị của hàm số.
Sau đó ta dùng chức năng ``**Shift Solve**'' để dò tìm nghiệm hoặc sử dụng chức năng lập bảng để tìm nghiệm nguyên.

Ví dụ 1: Đề thi ĐH Khối B2011.
Giải phương trình:

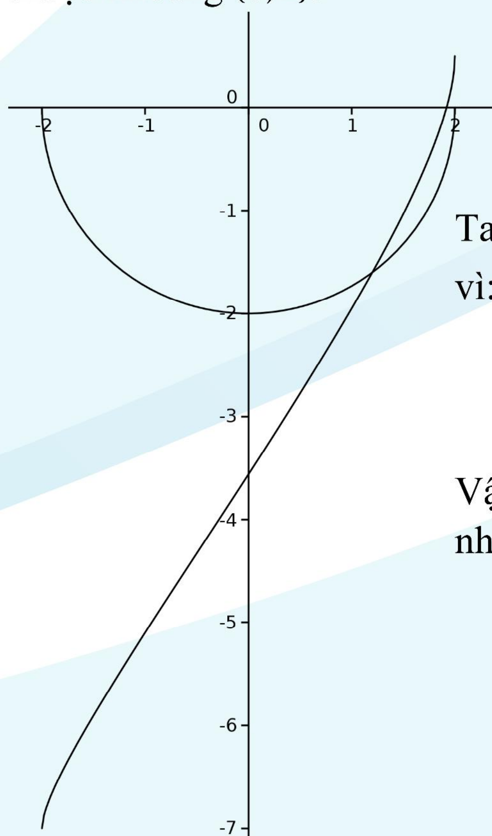
$$3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x \qquad (1)$$

Bài toán này có nhiều cách giải mà đáp án là một cách giải chuẩn để chấm thi. Tuy nhiên với sự hỗ trợ của máy tính cầm tay, ta có một cách giải khác như sau:

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\left[3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+3x-10\right] = -\sqrt{4-x^2}$$

- hàm số $y = \frac{1}{4}\left[3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+3x-10\right]$ là hàm số đồng biến, xác định trên đoạn $[-2;2]$
- hàm số $y = -\sqrt{4-x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn dưới.

Do đó ta dùng phương pháp đồ thị (như hình vẽ)
Nhìn vào đồ thị, ta thấy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0;2)$.



Ta thấy $x = \frac{6}{5}$ thỏa mãn phương trình (1) vì:

$$3\sqrt{2+\frac{6}{5}}-6\sqrt{2-\frac{6}{5}} = 10-\frac{18}{5}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{6}{5}$$

Bằng cách sử dụng máy tính cầm tay CASIO 570VN Plus ta thực hiện như sau:

CASIO 570VN Plus

3 [√■] 2 [+] [ALPHA] [X] [▶] [−] 6 [√■] 2 [−] [ALPHA] [X] [▶] [+] 4 [√■] 4 [−] [ALPHA] [X] [x^2] [ALPHA] [=] [a] 10 [−] 3 [ALPHA] [X]

[a] khi chúng tôi viết [ALPHA] [=] ta sẽ hiểu là bấm [ALPHA] [CALC]

Bấm vào [SHIFT] [CALC] **(Solve)**, sau đó nhập $x = 1$ chờ máy tính dò tìm và cho đáp số $x = 1.2$. Sau đó bấm vào [RCL] [X] ta nhận được $x = \frac{6}{5}$.

Ví dụ 2: Đề thi ĐH Khối B2010.

Giải phương trình:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

Sử dụng chức năng lập bảng của máy tính.

- [MODE] [7]
- $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8$ [=]
- Start: [0] [=] End: [6] [=]
  Step: [1] [=]
- Ta có kết quả ghi vào bảng như sau:
- Nhìn vào bảng ta thấy $x = 5$ là nghiệm.

x	$f(x)$
0	-9.449
1	-19.236
2	-23.354
3	-21.569
4	-13.808
5	**0**
6	20.358

Tới đây ta có hai cách để tiếp tục giải bài toán.

Cách 1: Đáp án. Phương trình có thể được viết:

$$(x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right]=0$$

Phần nằm trong móc vuông là dương nên phương trình tương đương với $x=5$. *Muốn làm cách này học sinh phải nắm vững kỹ năng giải phương trình.*

Cách 2: Dùng phương pháp đồ thị.
Phương trình có thể được viết:

$$\frac{1}{3}\left[\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}\right]=-x^2+\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}$$

Vế trái là biểu thức của một hàm số đồng biến và vế phải là hàm số bậc hai. Cả hai đều dễ vẽ đồ thị với sự hỗ trợ của máy tính cầm tay.

Parabol

MODE 5 3

(−) **1** = $\mathbf{\frac{14}{3}}$ = $\mathbf{\frac{8}{3}}$=

gõ dấu = 4 lần ta được các số:

$x_1=5.1, x_2=-0.5, x_{\max}=\frac{7}{3}=2.3, y_{\max}=\frac{73}{9}=8.1$

Dựa vào các số liệu ta vẽ được parabol dễ dàng.

Hàm số đồng biến

MODE 7

Nhập hàm số vô tỉ: $f(x) = \frac{1}{3}\left[\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x}\right]$

Start $-\frac{1}{3}$ =

End 6 =

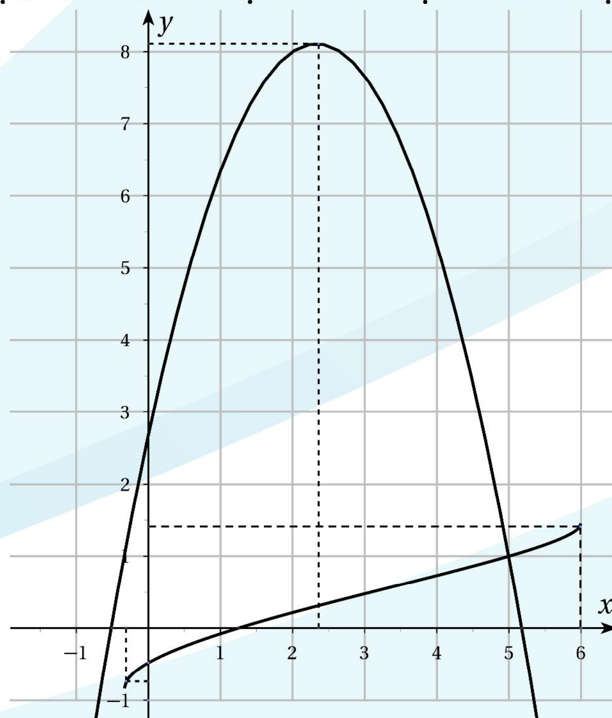
Step $\frac{6+1/3}{2}$ (6 + 1 ▭ 3) ▭ 2)

=

ta được 3 điểm để chấm vào trục toạ độ:

$y_1 = -0.83, y_2 = 0.43, y_3 = 1.5$

Dựa vào các số liệu ta vẽ được hai đồ thị dễ dàng.



Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét:

1. Hai bài thi trên (ví dụ 1 và ví dụ 2) nếu giải bằng phương pháp đại số thuần túy ta phải giải bằng hai cách khác nhau. Tuy nhiên với sự hỗ trợ của máy cầm tay, ta chỉ sử dụng cùng một phương pháp đồ thị.
2. Trong ví dụ 2, để thực hiện như đáp án, học sinh phải rèn luyện nhiều về các phương pháp giải và phải suy nghĩ lâu trong khi làm bài. Cách còn lại chỉ cần có thói quen sử dung máy tính trong việc vẽ đồ thị. *``Trăm hay không bằng tay quen."*

Bài tập tương tự: Giải phương trình:

$$-2x^4+3x^2+\frac{3}{8}=\sqrt{3-4x}$$

Hướng dẫn: Lập bảng cho hai hàm số.

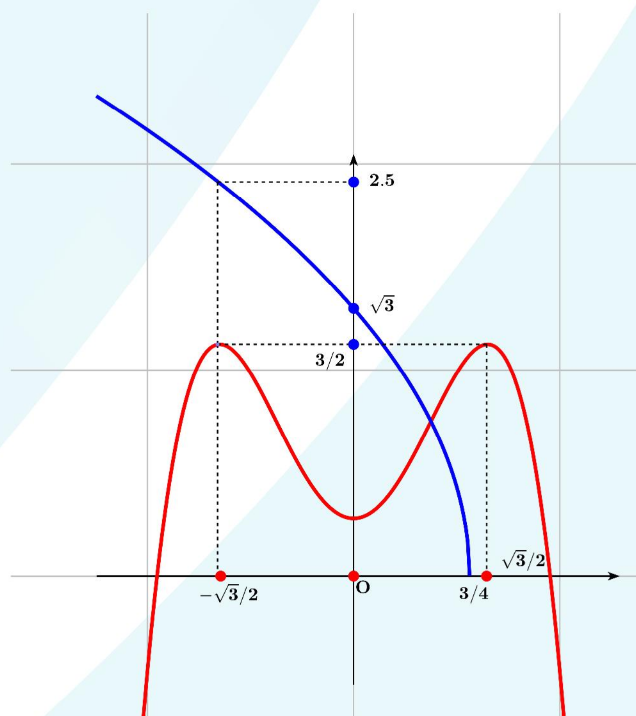
1. Nhập hàm $f(x)$ từ các phím: $-2x^4+3x^2+\frac{3}{8}$ [=]
2. Nhập hàm $g(x)$ từ các phím: $\sqrt{3-4x}$ [=]
3. Nhập **Start** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [=] **End** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [=] **Step** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [=]

x	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
f(x)	**3/2**	**3/8**	**3/2**
g(x)	**2.5**	$\sqrt{3}$	‖

Nhìn vào đồ thị, ta thấy phương trình:

$$-2x^4+3x^2+\frac{3}{8}=\sqrt{3-4x}$$

có một nghiệm duy nhất.



Bấm máy tính tìm nghiệm

(−) 2 X x■ 4 ▶ + 3 X x² + 3 ▭ 8
ALPHA CALC (=) √■ 3 − 4 X ▶ SHIFT CALC (SOLVE)
0 = $\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$.

4.3 Vấn đề giải bất phương trình

Máy tính CASIO 570VN Plus cung cấp chức năng giải một bất phương trình bậc 2 hoặc bậc 3. Các ví dụ sau đây cho thấy với công cụ mới này việc giải một phương trình/bất phương trình đã trở nên dễ hơn rất nhiều để giảm thiểu áp lực công việc cho học sinh.

Ví dụ 3: Đề thi ĐH Khối D 2008.

Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x} \geqslant 0 \qquad (1)$

Điều kiện: $\dfrac{x^2-3x+2}{x} > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2.$

Khi đó

$(1) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x} \leqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-4x+2 \leqslant 0$

$\Longleftrightarrow 2-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{2}$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là:

$$2-\sqrt{2} \leqslant x < 1 \vee 2 < x \leqslant 2+\sqrt{2}$$

Sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc 3:

MODE ▼ 1 2 1

1 = (–) 3 = 2 = 0 = =

(Nhập 4 hệ số của bất phương trình bậc 3 và nhấn = ta được nghiệm của bất phương trình).

Sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc 2:

MODE ▼ 1 1 3

1 = (–) 4 = 2 = =

(Nhập 3 hệ số của bất phương trình bậc 2 và nhấn = ta được nghiệm của bất phương trình).

Nhận xét: *Theo lộ trình giải bài toán ở trên, học sinh tập trung giải bất phương trình còn việc tính toán trung gian máy tính cầm tay sẽ đảm nhiệm.*

Ví dụ 4: Đề thi ĐH Khối B 2008.

Giải bất phương trình $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0 \quad (1)$

Điều kiện: $\dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \quad (2)$

$(1) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2+x}{x+4} > 6 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Longleftrightarrow -4 < x < -3 \vee x > 8$

Tất nhiên nghiệm này thỏa điều kiện (2).

Sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc 3:

MODE ▼ 1 2 1
1 = 4 (−) 5 = (−) 2 0 − 2 4
= (−) 2 4 × 4 = =

(Nhập các hệ số của bất phương trình bậc 3 (kể cả hệ số tạo thành do các phép tính số học) và nhấn = ta được nghiệm của bất phương trình).

Nhận xét: *Việc sử dụng tính năng giải bất phương trình trên máy tính tương đương với việc lập bảng nếu giải trực tiếp. Việc lập bảng không phải lúc nào cũng dễ dàng, còn việc sử dụng máy tính là một thói quen có thể luyện tập được trong quá trình học và giải toán.*

Ví dụ 4:

Giải bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geqslant \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \quad (1)$

$(1) \Longleftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geqslant \left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{x-1}{x+1}}$

$\Longleftrightarrow x-1 \geqslant -\dfrac{x-1}{x+1} \Longleftrightarrow x-1+\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x+1} \geqslant 0$

Sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc 3, ta có đáp số như sau:

$$-2 \leqslant x < -1 \vee x \geqslant 1$$

Bấm máy giải bất phương trình bậc 3

MODE ▼ 1 2 3
1 = 2 = (−) 1 = (−) 2 = =

A≤X≤B, C≤X
-2≤X≤-1, 1≤X

Ví dụ 5: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}} > 9-x \quad (1)$$

Ta có nhận xét $x=9$ không là nghiệm. Do đó:

$$(1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9-x<0 \\ \dfrac{x^2+9x-162}{x-2} \geqslant 0 \end{array}\right. \text{ hay } \left\{\begin{array}{l} 9-x>0 \\ \dfrac{(x-9)(x+18)}{x-2} > (x-9)^2 \end{array}\right.$$

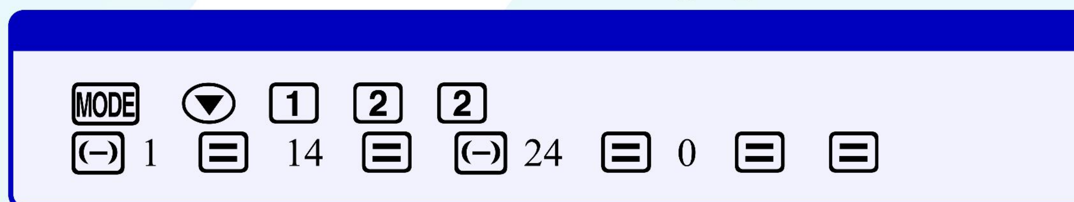
Sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc 3, ta có:

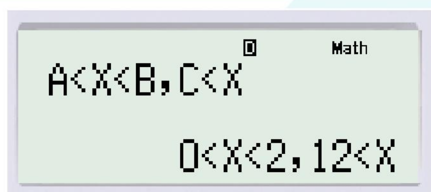
MODE ▼ 1 2 3
1 = 7 = (−) 1 8 − 1 6 2 = 1 6 2
× 2 = =

A≤X≤B, C≤X
-18≤X≤2, 9≤X

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ -18 \leqslant x < 2 \vee x \geqslant 9 \end{cases} \Longleftrightarrow x > 9$$

$$(II) \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ \dfrac{x+18}{x-2} - x + 9 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ \dfrac{-x^2+12x}{x-2} < 0 \end{cases}$$





$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ 0 < x < 2 \vee x > 12 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 < x < 2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$0 < x < 2 \vee x > 9$$

4.4 Lưu nghiệm và truy xuất nghiệm

Việc giải một phương trình bậc 2, bậc 3 hoặc một hệ phương trình rồi lưu kết quả vào ô nhớ, sau đó truy xuất kết quả để xử lý số liệu là một trong các tính năng mới của CASIO 570VN Plus .

Ví dụ 5: Phỏng theo đề thi ĐH Khối D 2011.[2]
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{2x^2+3x+4}{x+1}$$

[2]Chúng tôi có một điều chỉnh nhỏ bài toán để thấy hết tính năng mới hữu ích của máy tính CASIO 570VN Plus

trên đoạn $[0;2]$

$$y' = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} \\ x = \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Ta sử dụng máy tính để tìm hai điểm cực trị và lưu diểm cực trị thuộc đoạn $[0;2]$ vào ô nhớ [A].

sử dụng máy tính để tìm hai điểm cực trị

[MODE] [5] [3]
2 [=] 4 [=] [(−)] 1 [=] [=] [SHIFT] [RCL] **(STO)** [(−)]
(A) [=]

Sau đó trở ra [MODE] [1] nhập hàm số để tính các giá trị $y(0); y(2); y(A)$

[▭/▭] 2 [ALPHA] [X] [x^2] [+] 3 [ALPHA] [X] [+] 4 [▼] [ALPHA] [X] [+] 1	
[CALC] 0 [=]	4
[CALC] 2 [=]	6
[CALC] [ALPHA] [(−)] **(A)** [=]	$-1+2\sqrt{6}$

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là $-1+2\sqrt{6}$ và 6.

Nhận xét: *Máy tính thực hiện hai công việc: giải phương trình bậc hai và lưu nghiệm vô tỉ dương vào ô nhớ* [A] *Sau đó truy xuất* [A] *để*

tính giá trị của hàm số và xuất đáp số dưới dạng số vô tỉ. Với sự tiện lợi này học sinh sẽ ghi được kết quả vào bài làm.

Ví dụ 6: Đề thi ĐH Khối D 2011.

Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$$

Bằng phương pháp đặt ẩn số phụ $u=x^2-x$; $v=2x-y$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} uv=m \\ u+v=1-2m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u^2+(2m-1)u+m=0 \quad (1) \\ v=1-2m-u \end{cases}$$

Ta bấm máy tính để tìm giá trị nhỏ nhất của u làm điều kiện.
MODE 5 3
1 = (−) 1 = 0 = = = =
ta được Y-Value Minimum $=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy ta có điều kiện $u \geqslant -\dfrac{1}{4}$

$(1) \Longleftrightarrow m=\dfrac{-u^2+u}{2u+1} \quad (2)$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm thỏa điều kiện $u \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{-u^2+u}{2u+1}$

$$f'(u)=0 \Longleftrightarrow -2u^2-2u+1=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ u=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Sử dụng máy tính CASIO 570VN Plus như ví dụ trên (lưu nghiệm vào ô nhớ A và truy xuất để tính giá trị của hàm số tại A) ta

tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(u)$ trên $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ là $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (vì $\lim_{u\to+\infty} f(u) = -\infty$) nên

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. Tìm khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số *(đến 9 chữ số thập phân)*.

MODE 5 3 3 = (−) 8 = 3 =
$x_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)** = $x_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$
SHIFT RCL **(STO)** °’’’ **(B)**
MODE 1
X x^3 − 4 X x^2 + 3 X − 5
CALC A = SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
CALC B = SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

√■ (B − A) x^2 + (D − C) x^2 =

Math
√(PreAns−Ans)²+▷
3.261783534

4.5 Bộ nhớ Ans và PreAns

Máy tính CASIO 570VN Plus được trang bị thêm Bộ nhớ ALPHA Ans **(PreAns)**. Nhờ có bộ nhớ Ans và ALPHA Ans **(PreAns)** mà ta

có thể thiết lập các số hạng của dãy số Fibonacci và nhiều ứng dụng khác.

Ví dụ 7: Đề thi ĐH Khối D 2011.

Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$

Sử dụng phương pháp đổi biến số $t = \sqrt{2x+1}$ tích phân đã cho trở thành:

$$I = \int_1^3 \left(2t^2 - 4t + 5 - \frac{10}{t+2}\right)dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 5t - 10\ln|t+2|\right]_1^3$$

nhập biểu thức

2 X x^3 ▭/▭ 3 ▶ − 2 X x^2 + 5 X

CALC 3 = CALC 1 = ALPHA Ans (PreAns) −

Ans = $\frac{34}{3}$

Vậy $I = \frac{34}{3} - 10\ln\frac{5}{3}$.

Ví dụ 8: Phỏng theo đề thi ĐH Khối B 2004. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 4\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) do đó:

$$(1) \Longleftrightarrow m = \frac{-2t^2 + t + 4}{t+2}$$

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{-2t^2+t+4}{t+2}$ liên tục trên đoạn $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

	MODE 5 3
$f'(t)=0 \Longleftrightarrow t^2+4t+1=0$	1 = 4 = 1 =
$t=-2+\sqrt{3} \vee t=-2-\sqrt{3}$ (loại)	= $x_1=-2+\sqrt{2}$ SHIFT RCL (STO) (−) (A)
	= $x_2=-2-\sqrt{2}$ (loại)

tiếp theo

MODE 1	
▭ (−) 2 X x^2 + X	
+ 4 ▼ X + 2	
CALC A =	$9-4\sqrt{3}$
CALC (−) √■ 2 =	$-1-\sqrt{2}$
CALC √■ 2 =	$-1+\sqrt{2}$

$f\left(-2+\sqrt{3}\right)=9-4\sqrt{3}$; $f(-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}$; $f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$

Vậy GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ lần lượt là $9-4\sqrt{3}$ và $-1-\sqrt{2}$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$-1-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 9-4\sqrt{3}$$

tiếp theo trang30

Ta phân tích phần thực và phần ảo (thực chất là phần thừa số của m).

0	978	497 ("trừ 1000")
0	979	-503
1	-21	−503

2	975	027
3	−25	27

Vậy: $(1) \iff x^2 - 21x - 503 + m(-3x^2 + 25x - 27) = 0$

$\iff (1-3m)x^2 + (-21+25m)x - 503 - 27m = 0$

Đó là mẹo vặt thứ nhất.

(C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$$(25m-21)^2 - 4(1-3m)(-503-27m) > 0$$

Không cần khai triển và thu gọn (vì quá phức tạp), chỉ cầm bấm MTCT ta biết tam thức (VT) có hai nghiệm $m_1 = 0.3570319602$, $m_2 = 22.82569229$. lần lượt lưu vào [A] và [B].

Ta sẽ chuyển [A] và [B] sang số vô tỉ.

Mẹo vặt thứ hai

[A] [+] [B] [=] $\frac{6978}{301}$ [A] [B] [=] $\frac{2453}{301}$

Ta biết $\Delta' = \frac{a^2}{4}\left(x_1 - x_2\right)^2$ do đó:

[3] [0] [1] [x²] [(] [A] [−] [B] [)] [x²] [=] [÷] [4] [=]

11434768

Vậy: $m_1 = \frac{3489 - \sqrt{11434768}}{301}$, $m_2 \frac{3489 + \sqrt{11434768}}{301}$

Vậy (C) và d cắt nhau tại hai điểm phan biệt khi và chỉ khi:

$$m < \frac{3489 - \sqrt{11434768}}{301} \vee m > \frac{3489 + \sqrt{11434768}}{301}$$

CHƯƠNG 5

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

5.1 Tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a$; $CA = b$; $c = AB$. Để tìm diện tích tam giác ta sử dụng công thức Hê-rông:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ta khai triển thành:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Ví dụ 1: ĐH A,A1 năm 2013

Cho hình tứ diện $SABC$ trong đó ABC là tam giác vuông tại A, góc $\widehat{ABC} = 30°$. SBC là tam giác đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

Từ giả thiết ta suy ra đường cao $SH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ của tam giác đều SBC là đường cao của tứ diện.

Ta có $d(C,(SAB)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAB}} = \frac{S_{ABC}.SH}{S_{SAB}}$
Các cạnh của tam giác SAB như sau:

$$SB = a\ ;\ AB = a\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \sqrt{SH^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = a$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{\left(1+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

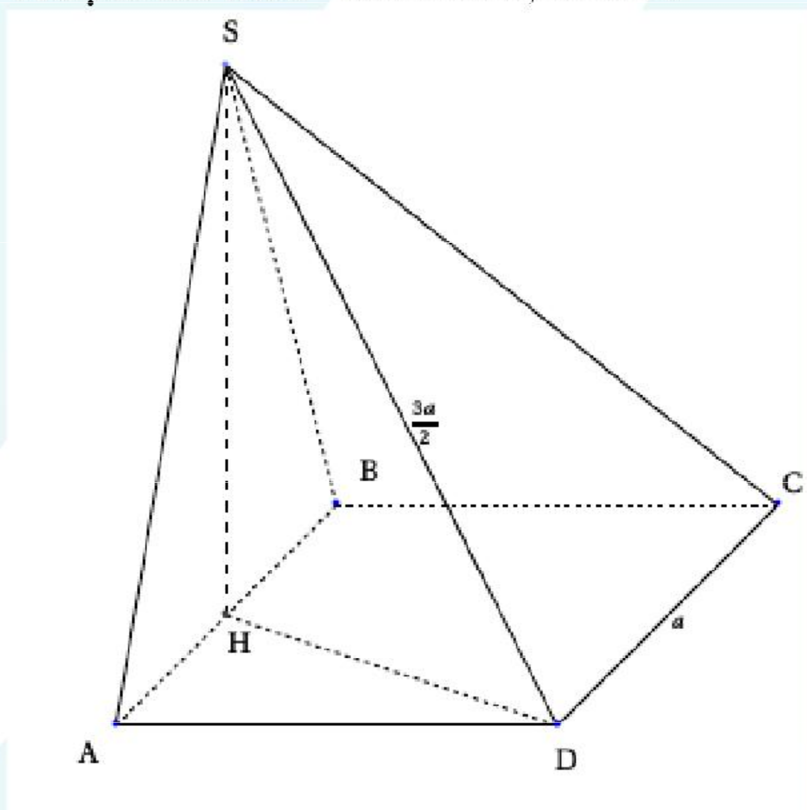
$$\times\sqrt{\left(-1+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{39}}{16}a^2$$

Tất nhiên ta có thể thực hiện phép tính dễ dàng. Ở đây chúng tôi đề nghị sử dụng MTCT để thực hành và tìm diện tích trong các trường hợp phức tạp hơn.

1 + 1 + √■ 3 ▶ ▭ 2 SHIFT RCL (STO) (−) (A)
1 + 1 − √■ 3 ▶ ▭ 2 SHIFT RCL (STO) °,,, (B)
1 − 1 + √■ 3 ▶ ▭ 2 SHIFT RCL (STO) hyp (C)
(−) 1 + 1 + √■ 3 ▶ ▭ 2 SHIFT RCL (STO) sin (D)
1 ▭ 4 ▶ √■ A B C D = $\frac{\sqrt{39}}{4}$

Vậy: $d(C,(SAB)) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{39}}{16}a^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$

Ví dụ 2: Bài HKG - ĐH Khối A,A1 2014.



Tính được:
$SH = a$,
$SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,
$BD = a\sqrt{2}$.

Hãy tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Ta có: $d(A,(SBD)) = \frac{3V_{SABD}}{S_{SBD}}$

với $V_{SABD} = \frac{1}{2}.V_{SABCD} = \frac{1}{6}a^3$

và $S_{SBD} =$

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

di chuyển con trỏ lên để điều chỉnh, không nhập lại biểu thức.

$\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**

$\frac{\sqrt{5}}{2}-\sqrt{2}+\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

$\frac{-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3}{2}$ SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

1 ▭/▭ 4 √▪ A B C D = $\frac{3}{4}$

Từ đó ta tính được $d(A,(SBD))=\frac{3V_{SABD}}{S_{SBD}}=\frac{2a}{3}$.

Ở đây ta lưu ý rằng có nhiều phương pháp nào để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Theo cách làm trên, học sinh không cần hạ đoạn vuông góc đến mặt phẳng. Bù lại việc tìm diện tích tam giác một cách thủ công là không đơn giản. May thay, máy tính cầm tay đã làm công việc không dễ dàng này.

5.2 Việc giải toán hình học không gian

Việc xuất hiện máy tính CASIO 570VN Plus có khả năng tính toán với độ chính xác cao và dễ sử dụng với với học sinh chắc chắn sẽ thay đổi cách giảng dạy của giáo viên và cách học tập của học sinh theo hướng: *học sinh tập trung cho bài toán của mình còn máy tính sẽ đảm nhiệm việc tính toán trung gian.* Qua đề thi học sinh giải toán

trên máy tính cầm tay và đề thi tuyển sinh đại học trong các năm qua ta đã thấy xuất hiện xu thế này.

Ví dụ 1: *(Đề thi HS giải toán trên máy tính cầm tay năm 2013-Bộ Giáo dục và Đào tạo)*[3]. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ biết độ dài cạnh bên là $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC.

1. Tính thể khối chóp $A'.BCC'B'$ theo a
2. Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

Cho biết $a = \sqrt{5}$cm, hãy tính góc giữa hai đường thẳng nói trên làm tròn tới độ, phút.

GIẢI

1. Ta có nhận xét $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{A'.ABC}$

   $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AC.A'D$ (với D là trung điểm BC.)

   $A'D^2 = A'A^2 - AD^2 = A'A^2 - \left(\frac{BC^2}{2}\right), \quad BC = 2a.$

   Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 - a^2} = \frac{a^3}{2}.$

   Suy ra: $V_{A'.BCC'B'} = a^3$

2. Ta có $\cos(AA', BC) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{AA'.BC}$

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AD.BC.\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = AD.BC.\cos 60°.$

Vậy $\cos(AA', BC) = \dfrac{AD.BC.\cos 60°}{AA'.BC} = \dfrac{a.\frac{1}{2}}{2a} = \dfrac{1}{4}$

Nhận xét: Trong quá trình giải bài toán, người học chỉ cần đưa ra các phép tính, cuối cùng nhập các số liệu vào máy và nhấn phím [=] để ghi kết quả, nhiều lần thực hiện tính toán như vậy cho đến khi hoàn chỉnh bài toán. Ví dụ, khi $\cos(AA', BC) = \dfrac{1}{4}$, ta bấm máy như sau:

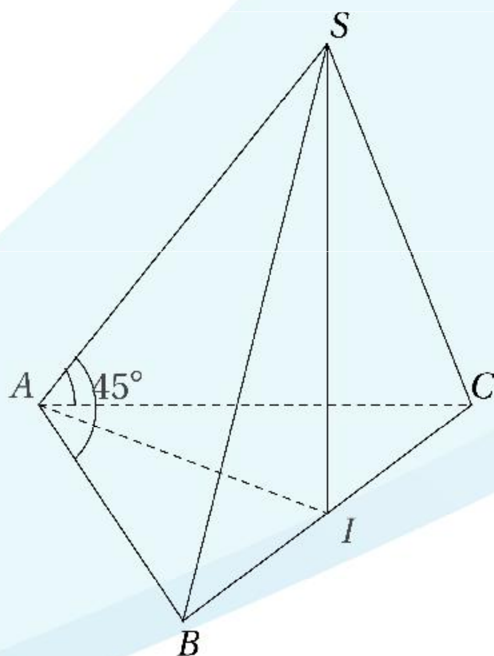
[SHIFT] [MODE] [3] **(Deg)**

[SHIFT] [cos] $(\cos^{-1})$ 1 [▭/▭] 4 [=] [°'''] $75°31'20.96''$

Vậy góc giữa AA' và BC là $75°31'$.

Chúng tôi muốn giới thiệu một bài toán hình học không gian với khối lượng tính toán đồ sộ nhưng máy tính đảm nhận gần hết những tính toán phức tạp này.

Ví dụ 2: Cho hình tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy và các góc $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 45°$. Tính thể tích khối tứ diện $SABC$ và khoảng cách từ trung điểm I của BC đến mặt phẳng (SAB).



Hai tam giác SAB và SAC bằng nhau nên $SB = SC$. Tam giác SBC cân tại S nên trung tuyến SI còn là đường cao, vậy $SI \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC)$ ta suy ra $SI \perp (ABC)$.

Đặt $SI = h$. Ta có $AI = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ nên $SA = \dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 27a^2}$.

Trong tam giác SAC ta có: $SC^2 = SA^2 + AC^2 - 2SA.AC.\cos 45° =$
$= h^2 + \dfrac{63}{4}a^2 - \dfrac{3a\sqrt{8h^2 + 54a^2}}{2}$

Ngoài ra $SC^2 = h^2 + \dfrac{9a^2}{4}$. So sánh ta có phương trình theo biến h:

$$\frac{27}{2}a^2 = \frac{3a\sqrt{8h^2 + 54a^2}}{2} \Longleftrightarrow h^2 = \frac{27}{8}a^2 \Longleftrightarrow h = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$$

Bấm phím:[4]

Bấm phím:

(2 7 ▭ 2 ▶ ▭ 3 ▭ 2 ▶) x^2 −
5 4 = ▭ 8 = √▭ Ans =

Thể tích của khối tứ diện $SABC$ là:

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a\sqrt{6}}{4} = \frac{27a^3\sqrt{2}}{16}$$

Bấm phím:

1 ▭ 3 ▶ × 9 √▭ 3 ▭ 4 ▶
× 3 √▭ 6 ▭ 4 =

Ta có: $d(I,(SAB) = \dfrac{3V_{SABI}}{S_{SAB}}$

ở đây: $V_{SABI} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{32}$.

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AS.AB\sin 45° = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{27}{2}a^2 + 27a^2}.3a.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{8}a^2.$$

[4] chỉ cần nắm vững thứ nguyên và a là đơn vị, ta nhập các con số, kết quả h tính theo a.

Bấm phím:

1 ▭ 4 ▶ √▭ 2 7 ▭ 2 ▶ + 2 7 ▶
× 3 × √▭ 2 ▶ ▭ 2 =

Từ đó ta tính được khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) là:

$$d(I,(SAB)) = \frac{81a^3\sqrt{2}}{32} \times \frac{8}{27a^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Bấm phím:

2 × 2 7 √▭ 2 ▭ 3 2 ▶
▭ 2 7 ▭ 8 =

Như các bạn thấy, người giải bài toán chỉ ban hành công thức (mà không tính toán gì cả), máy tính sẽ đảm nhận việc thực hiện các phép tính từ đơn giản đến phức tạp.

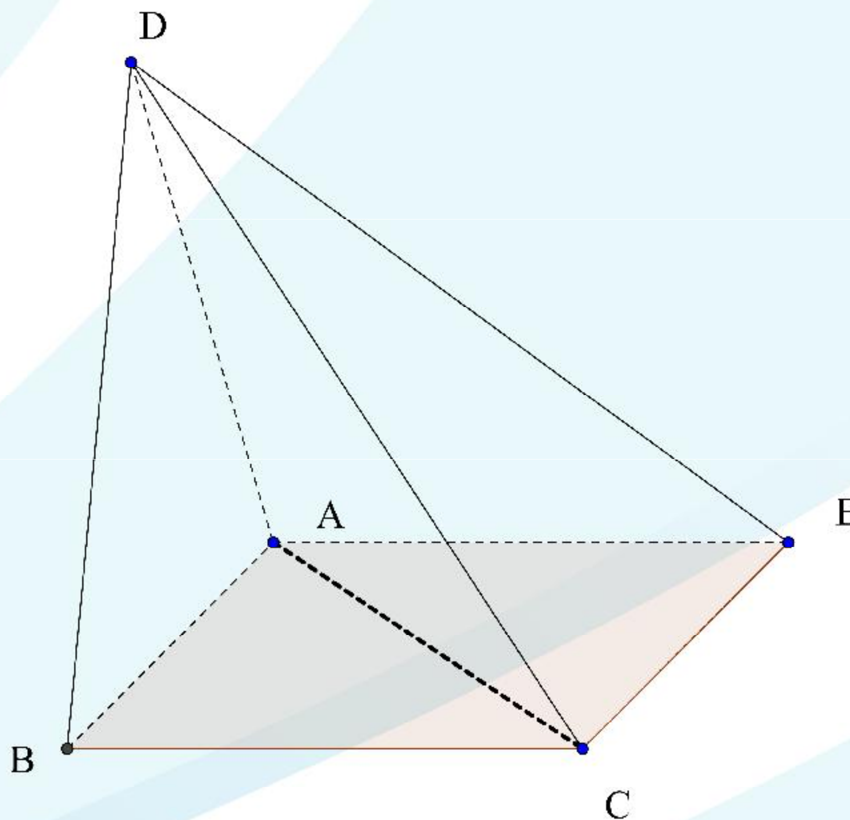
5.3 Các công thức tính thể tích tứ diện

Không kể công thức $V = \frac{1}{3}.Bh$ ta còn có các công thức sau:
Công thức 1:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}.AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)$$

Chứng minh công thức: Vẽ hình bình hành $ABCE$. Ta có:
$V_{ABCD} = V_{ACDE} = \frac{1}{3}.S_{CDE}.d(A,(CDE)) =$

$$= \frac{1}{6}.CD.CE.\sin(CD,CE).d(A,(CDE))$$
$$= \frac{1}{6}.CD.AB.\sin(CD,AB).d(A,(CDE))$$
$$= \frac{1}{6}.AB.CD.\sin(AB,CD).d(AB,CD) \text{ (ĐPCM)}$$



Công thức này thường dùng để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

- Ưu điểm của công thức là học sinh không cần dựng đoạn vuông góc chung hay hạ đoạn vuông góc xuống một phẳng *(là việc mà không phải lúc nào cũng thực hiện dễ dàng.)*

- Khuyết điểm là việc tính $\sin(AB,CD)$ đòi hỏi phải kiên trì sử dụng tích vô hướng. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên

(BCD).

Ta có: $\cos(AB,CD) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD} = \dfrac{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

$$\cos(AB,CD) = \frac{HB}{AB}.\cos(HB,CD)$$

Áp dụng: Bộ Giáo dục và Đào tạo 12/3/2014

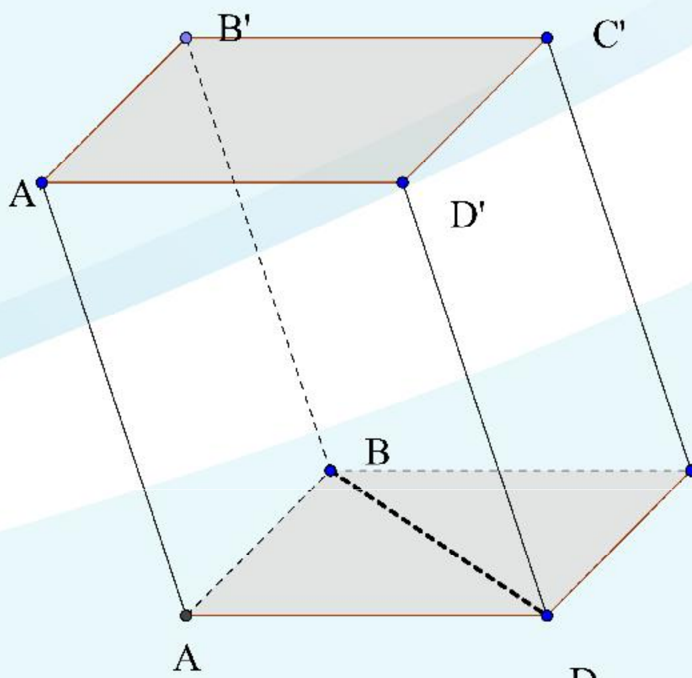
Cho khối hộp xiên $ABCD.AB'C'D'$ có các kích thước sau:

$$BD = a,\ AA' = b,\ d(AA',BD) = d,\ (\widehat{AA',BD}) = \alpha$$

Thiết lập công thức tính thể tích khối hộp theo a,b,d,α và áp dụng tính thể tích nói trên khi:

$$a = 5, b = 6, d = 4, \alpha = 50^\circ$$

đơn vị dài đo bằng cm.



GIẢI

Thể tích khối hộp bằng 6 lần thể tích tứ diện $A'ABD$. Do đó:

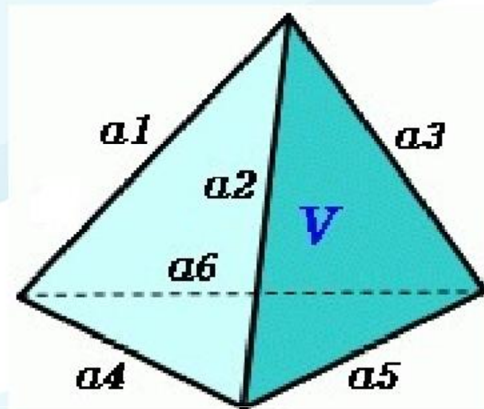
$$V_{\text{kh}} = AA'.BD.\sin(AA',BD).d(AA',BD) = abd\sin\alpha$$

Với kích thước đã cho, ta có:
$V_{\text{kh}} = 5 \times 6 \times 4 \times \sin(50) = 91.92533317\text{cm}^3$
Công thức 2:

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{A+B+C-D}$$

- $A = a_1^2 a_5^2 (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_1^2 - a_5^2)$
- $B = a_2^2 a_6^2 (a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_6^2)$
- $C = a_3^2 a_4^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2)$
- $D = a_1^2 a_2^2 a_4^2 + a_2^2 a_3^2 a_5^2 + a_1^2 a_3^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 a_6^2$

Xem hình vẽ:



Bài tập áp dụng: Cho một tứ diện $ABCD$ có các kích thước (đơn vị chiều dài là cm) như sau:

$$AB = AC = AD = 6\ ,BC = 9\ ,CD = 10\ ,BD = 11$$

GIẢI

Cách 1: ***Chỉ áp dụng khi ba cạnh đi qua một đỉnh bằng nhau.***

Do $AB = AC = AD$ nên chân đường cao AH của tứ diện là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.
Vậy $AH = \sqrt{AB^2 - R^2}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Dùng công thức Hê-rông

Diện tích tam giác BCD:

1 ▭ 4 ▶ √▭ (9 + 1 0 + 1 1)
(9 + 1 0 − 1 1)
(9 − 1 0 + 1 1)
((−) 9 + 1 0 + 1 1) = **42.42640687**
SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Bán kính R

▭ 9 × 1 0 × 1 1 ▼ 4 A =
5.833630945 SHIFT RCL (STO) °''' (B)

Chiều cao AH

√▭ 6 x^2 − B x^2 = $\frac{3\sqrt{14}}{8}$ SHIFT RCL (STO)
hyp (C)

Thể tích tứ diện $ABCD$ là:

1 ▭ 3 ▶ A C **19.84313483**cm^3

Cách 2: ***Sử dụng công thức Hê-rông (áp dụng trong mọi trường hợp.***

công thức Hê-rông

$6^2.10^2(-6^2-10^2+9^2+11^2+6^2+6^2)$ **(STO) (A)**

$6^2.9^2(-6^2-9^2+10^2+11^2+6^2+6^2)$**(STO) (B)**

$6^2.11^2(-6^2-11^2+10^2+9^2+6^2+6^2)$**(STO) (C)**

$(6.6.9)^2+(6.6.10)^2+(6.6.11)^2+(9.10.11)^2$**(STO) (D)**

1 ▭ 1 2 ▶ √▭ A + B + C − D = $\frac{15\sqrt{7}}{2}$

S⇔D **19.84313483**

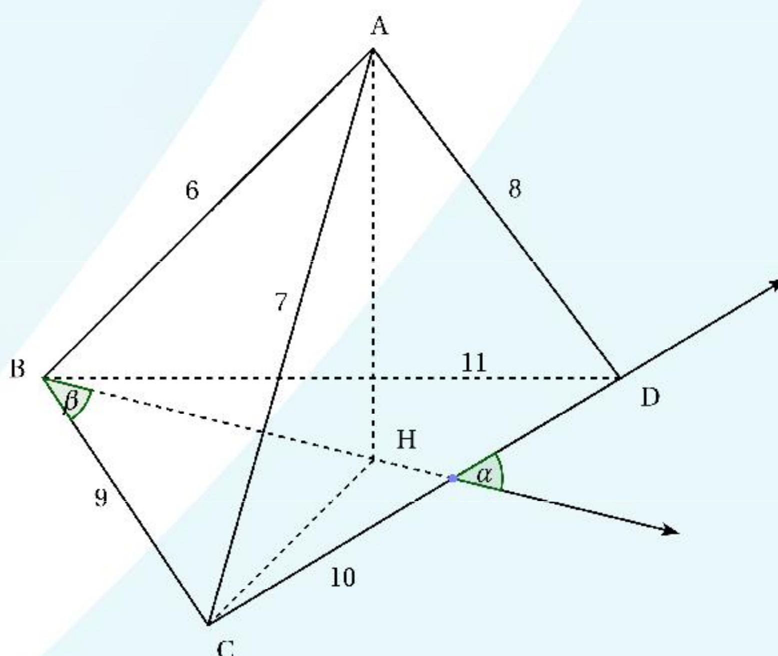
Xem thêm các ví dụ trong phần ***"Các bài thi HSG máy tính cầm tay"***.

5.4 Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

Cho một hình tứ diện với kích thước như trên, nghĩa là có các cặp cạnh đối a_1, a_5 ; a_2, a_6 ; a_3, a_4.
Đặt $p = \frac{1}{2}(a_1a_5 + a_2a_6 + a_3a_4)$. Khi đó ta có công thức sau đây để tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện:

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{p(p-a_1a_5)(p-a_2a_6)(p-a_3a_4)}$$

Bài tập áp dụng công thức: Cho một hình tứ diện $ABCD$ có các kích thước như sau: $AB = 6, CD = 10$; $AC = 7$, $BD = 11$; $AD = 8$, $BC = 9$. Đơn vị chiều dài đo bằng cm.



1. Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

2. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

3. Tính diện tích tam giác BCD từ đó tính góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD.

4. Tính khoảng cách giữa hai dường thẳng chéo nhau AB và CD.

GIẢI

1. Đặt:

$A = 6^2.10^2(-6^2 - 10^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2)$

6 x^2 × 1 0 x^2 ((−) 6 x^2 − 1 0 x^2 + 7 x^2 + 8 x^2 + 9 x^2 + 1 1 x^2) **(STO) (A)**

$B = 7^2.11^2(-7^2 - 11^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2)$

7 x^2 × 1 1 x^2 ((−) 7 x^2 − 1 1 x^2 + 6 x^2
+ 8 x^2 + 9 x^2 + 1 0 x^2) **(STO) (B)**

$C = 8^2.9^2(-8^2 - 9^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 11^2)$

7 x^2 × 9 x^2 ((−) 9 x^2 − 9 x^2 + 6 x^2
+ 7 x^2 + 1 0 x^2 + 1 1 x^2) **(STO) (C)**

$D = (6.7.9)^2 + (6.8.11)^2 + (7.8.10)^2 + (9.10.11)^2$

(6 × 7 × 9) x^2 + (6 × 8 × 1 1) x^2
+ (7 × 8 × 1 0) x^2 + (9 × 1 0 ×
1 1) x^2 **(STO) (B)**

Khi đó: $V_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{12}\sqrt{A + B + C - D} = 54.120172353343\text{cm}^3$

2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cho bởi công thức:

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{p(p - a_1 a_5)(p - a_2 a_6)(p - a_3 a_4)} = \frac{S}{6V}$$

trong đó S là diện tích của một tam giác mà có các cạnh là trích của các cặp cạnh đối diện.

Ở đây là tam giác có các cạnh: $60, 72, 77$

Ta tính:

$90 + 72 + 77$ SHIFT RCL **(STO)** (−) **(A)**

$90 + 72 - 77$ SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**

$90 - 72 + 77$ SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**

$-90 + 72 + 77$ SHIFT RCL **(STO)** sin **(D)**

Diện tích tam giác nêu trên cho bởi công thức Hê-rông:

$S = \frac{1}{4}\sqrt{A.B.C.D} = 2038.66641\text{cm}^2$

1 ⊟ 4 ▶ √■ A B C D =

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại khối tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$$R = \frac{S}{6V} = 6.27820882\text{cm}$$

3. Diện tích tam giác BCD cho bởi công thức:

$S_{BCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(9+10+11)(9+10-11)(9-10+11)(-9+10+11)} =$

$= 42.4240687\text{cm}^2$

Suy ra chiều cao của tứ diện kẻ từ A là $AH = 3.826874087\text{cm}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos(AB, CD) &= \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD} = \frac{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD} \\ &= \frac{HB.CD\cos(HB, CD)}{AB.CD} = \frac{HB\cos(BH, CD)}{AB} \\ &= \frac{\sqrt{AB^2 - AH^2}\cos\alpha}{AB}\end{aligned}$$

trong đó $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ với $\gamma = \widehat{BCD}$ như trong hình vẽ.

Ta có:

$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4.621150801$

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 5.86131808$

$\cos\beta = \frac{BC^2 + BH^2 - HC^2}{2.BC.BH} = 0.8174971865$

$\Longrightarrow \beta = 35^\circ 9' 53.89'$

$$\cos\gamma = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2.BC.CD} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \gamma = 70°31'43.61'$$

Vậy $\cos\alpha = 0.2704953926 \Longrightarrow \alpha = 74°18'22.51"$.

4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD cho bởi công thức:

$$d(AB, CD) = \frac{6V}{AB.CD.\sin(AB, CD)} = 5.621582702\text{cm}$$

5.5 Các bài toán về đường thẳng và đường tròn

Bài toán về Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng, gần đây là một bài toán khó trong bài thi đại học. Từ đó nảy sinh ra vấn đề là cần phải rèn luyện cho học sinh lớp 10 và 12 kỹ năng làm bài. Ngoài kiến thức toán học các em phải biết sử dụng máy tính thành thạo mới hy vọng giải hoàn chỉnh bài toán này.

Ví dụ 1. A2013. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $A(-4;8)$, C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$, M là điểm đối xứng của B qua C, $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm toạ độ của hai đỉnh B, C.

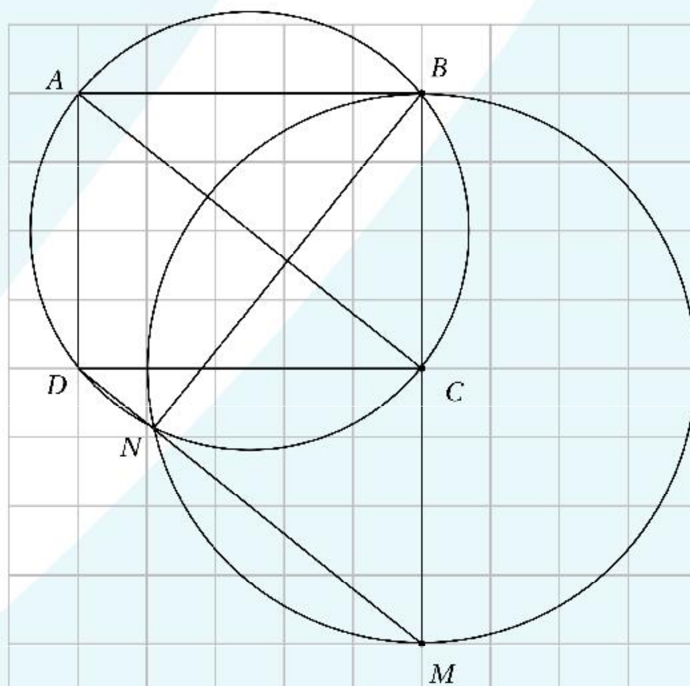
Định hướng cho học sinh:

1. Điểm C nằm trên đường thẳng d, do đó chỉ cần tìm thêm một đường chứa điểm này. Đó là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật. Đường tròn này xác định được vì đi qua A, N và C.

2. Điểm B là giao điểm của hai đường tròn: Đó là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và đường tròn tâm C bán kính CN.

Sau khi định hướng xong, vấn đề còn lại là của máy tính cầm tay.

GIẢI



1. $C(c;-2c-5)$ suy ra tâm của hình chữ nhật $ABCD$ là:

   $I\left(\dfrac{c-4}{2};\dfrac{-2c+3}{2}\right)$

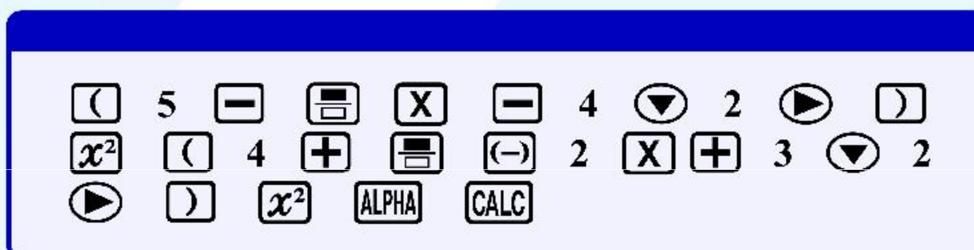
   Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ là:

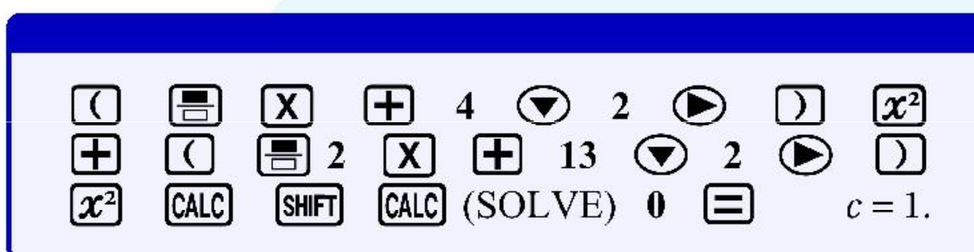
$$\left(x-\frac{c-4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{-2c+3}{2}\right)^2=\left(\frac{c+4}{2}\right)^2+\left(\frac{2c+13}{2}\right)^2$$

   Đường tròn này đi qua N nên ta có:

$$\left(5-\frac{c-4}{2}\right)^2+\left(4+\frac{-2c+3}{2}\right)^2=\left(\frac{c+4}{2}\right)^2+\left(\frac{2c+13}{2}\right)^2$$

Đây là phương trình bậc nhất, bấm CALC SHIFT CALC (SOLVE) ta tìm được c.





Vậy $c = 1$ do đó $C(1; -7)$.

2. Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là:

$$x^2 + y^2 + 3x - y - 60 = 0$$

Phương trình đường tròn tâm C bán kính CN là:

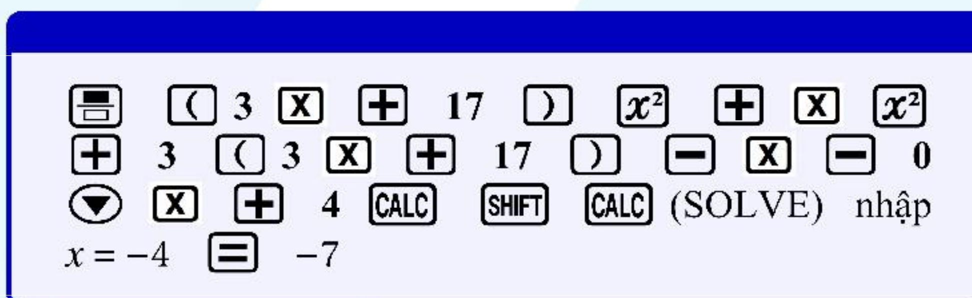
$$x^2 + y^2 - 2x + 14y + 25 = 0$$

Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - y - 60 & = 0 \\ x - 3y - 17 & = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $(3y + 17)^2 + y^2 + 3(3y + 17) - y - 60 = 0$

Ta biết phương trình này có hai nghiệm với một nghiệm đã biết là $y_N = -4$.



Vậy $y_B = -7$. Tóm lại $B(-4;-7)$

Nhận xét: Tuy là một bài toán khó của kỳ thi, nhưng toàn bộ lời giải, chủ yếu là thực hiện trên máy tính.

5.6 Các bài thi HSG máy tính cầm tay

(1) Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2+2x+2} - 3x + 5\ln(x+2)$. Tính gần đúng *(chính xác tới hai số lẻ sau dấu phẩy)* toạ độ của ba điểm cực trị và diện tích tam giác có các đỉnh là ba điểm cực trị nói trên.

GIẢI:

$$y' = 0 \iff \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+2}} - 3 + \frac{5}{x+2} = 0$$

Đề bài cho biết hàm số này có ba điểm cực trị. Vậy phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm. Ta tìm ba nghiệm này như sau:

- Nhập phương trình (nằm trong dấu đóng mở ngoặc đơn) lên màn hình, nhớ nhấn dấu [=] để lưu biểu thức.
- Dùng lệnh [SHIFT] [CALC] **(SOLVE)** để tìm nghiệm thứ nhất là -0.33 [SHIFT] [RCL] **(STO)** [(−)] **(A)**
- Bấm [▲] để làm hiện ra biểu thức, ra lệnh [÷] [X] [−] [A], ra lệnh [SHIFT] [CALC] **(SOLVE)**, chấp nhận [A] và chấp nhận [X] bằng cách nhấn hai lần dấu [=] ta sẽ được nghiệm thứ hai là -0.62 [SHIFT] [RCL] **(STO)** [°'''] **(B)**

- Bấm ▲ để làm hiện ra biểu thức, ra lệnh ▭ (X − A) (X − B), ra lệnh SHIFT CALC **(SOLVE)**, chấp nhận A, chấp nhận B và chấp nhận X ta sẽ được nghiệm thứ ba là 1.62 SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)**
- Dùng lệnh CALC để tính các giá trị cực tri lần lượt lưu vào D , E , F .
- Vậy toạ độ ba điểm cực trị của hàm số là

$$A(-0.33;4.85)\ ,B(-0.2;4.85)\ ,C(1.62;5.19)$$

- Diện tích tam giác tạo thành là:

$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|(\mathbf{x_B}-\mathbf{x_A})(\mathbf{y_C}-\mathbf{y_A})-(\mathbf{x_C}-\mathbf{x_A})(\mathbf{y_B}-\mathbf{y_A})\right|$$

R Math ▲
½|(B−A)(F−D)−((▶
0.05787871093

Thực hiện bấm phím như sau:

1 ▭ 2 ▶ (B − A) (F − D − (C − A) (E − D = **0.06**

(2) Cho tứ diện $SABC$ trong đó:

$$SA=2\ ,SB=\sqrt{2}\ ,SC=\sqrt{3}\ ;AB=BC=CA=1$$

Tính thể tích tứ diện.

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{A+B+C-D}$$

- $A = a_1^2 a_5^2(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_1^2 - a_5^2)$
- $B = a_2^2 a_6^2(a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_6^2)$
- $C = a_3^2 a_4^2(a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2)$
- $D = a_1^2 a_2^2 a_4^2 + a_2^2 a_3^2 a_5^2 + a_1^2 a_3^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 a_6^2$

GIẢI:

Thể tích tứ diện

2 SHIFT RCL (STO) (−) (A)
√■ 2 SHIFT RCL (STO) °’’’ (B)
√■ 3 SHIFT RCL (STO) hyp (C)
1 SHIFT RCL (STO) sin (D)
1 SHIFT RCL (STO) cos (E)
1 SHIFT RCL (STO) tan (F)

chú ý nhập đúng thứ tự các cặp cạnh đối diện nhau:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
A	B	C	D	E	F

15 26 34 124 235 456 613

tính các giá trị

$A^2E^2(B^2+C^2+D^2+F^2-A^2-E^2)$ SHIFT (STO) (X)
$B^2F^2(A^2+C^2+D^2+E^2-B^2-F^2)$ SHIFT (STO) (Y)
$C^2D^2(A^2+B^2+E^2+F^2-C^2-D^2)$ SHIFT (STO) (M)
$(ABD)^2+(BCE)^2+(DEF)^2+(FAC)^2$ = Ans

$$\mathbf{V=\frac{1}{12}\sqrt{X+Y+M-Ans}=\frac{\sqrt{5}}{12}=0.183389981}$$

(3) Cho tứ diện $SABC$ trong đó:

$$SA=2\,,SB=\sqrt{2}\,,SC=\sqrt{3}\,;AB=BC=CA=1$$

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tư diện.

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cho bởi công thức:

$$R=\frac{1}{6V}\sqrt{p(p-a_1a_5)(p-a_2a_6)(p-a_3a_4)}$$

với $p=\frac{1}{2}(a_1a_5+a_2a_6+a_3a_4)$.
Áp dụng vào bài toán ta có:

- $p=2.573132185$
- $\sqrt{p(p-a_1a_5)(p-a_2a_6)(p-a_3a_4)}=\frac{\sqrt{23}}{4}$

Vậy $R=\frac{1}{6V}\sqrt{p(p-a_1a_5)(p-a_2a_6)(p-a_3a_4)}=\frac{1}{6}.\frac{12}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{23}}{4}$

$R = \dfrac{\sqrt{115}}{10} \approx 1.072380529.$
Làm tròn với 4 số lẻ thập phân, ta có: $R = 1.0724$

Bài tập tương tự. Cho tứ diện $SABC$ với kích thước như sau:

$$SA = 6\ , SB = 7\ , SC = 8\ ;\ BC = 10; AC = 11; AB = 9$$

Hãy tính thể tích tứ diện và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
ĐS: $V = 54.120172353343$; $S_{\text{tp}} = 114.6320706552$
Lưu ý: $r = \dfrac{3V}{S_{\text{tp}}} = 1.416362072$

PHỤ LỤC

Việc sử dụng máy tính CASIO từ phía học sinh

Quyển sách đã được viết xong và chuẩn bị đưa vào sử dụng cho các lớp bồi dưỡng giáo viên, nhất là giáo viên ở các tỉnh đồng bằng sông Cửu long vốn rất thiếu nhiều tài liệu học tập. Ngay vào thời điểm viết xong quyển sách này, Phòng đầu tư giáo dục (BITEX) cho biết trên mạng, học sinh có rất nhiều sáng kiến trong việc sử dụng MTCT nhờ thầy xem và đánh giá việc sử dụng MTCT hiệu quả từ các sáng kiến đó.

Bản thân tôi từ một người làm toán hàn lâm, chuyển sang tìm hiểu MTCT cũng từ học trò luyện thi đại học của mình. Vì vậy khi BITEX đề nghị, tôi không ngần ngại gì. Phòng đầu tư giáo dục (BITEX) gợi ý tôi đọc một số các nghiên cứu của học sinh, nhất là nghiên cứu của bạn Trần Ngọc Ánh Phương:

http://kinhnghiemhoctap.blogspot.com/p/nang-cao.html

và theo yêu cầu của bạn ấy, tôi sẽ viết vào phần phụ lục này là "tham khảo Trần Ngọc Ánh Phương - kinhnghiemhoctap.blogspot.com"

Trong bài phụ lục này, phần trong đóng khung là của bạn Trần Ngọc Ánh Phương, tất nhiên tôi có vài sửa chữa nhỏ.

Sáng kiến 1: CÁCH NHÂN, CHIA ĐA THỨC CHỈ BẰNG MÁY TÍNH

Ví dụ 1: $(x+1)(x+2)+(3x^2+x+6)(x+7)$, bạn giải ra kết quả là:

$$3x^3+23x^2+16x+44$$

Bây giờ tôi (Trần Ngọc Ánh Phương) sẽ giải bài này chỉ bằng cách bấm máy tính do tôi nghĩ ra!

Bạn bấm:

1000 [=] [(] [Ans] [+] [1] [)] [(] [Ans] [+] [2] [)] [+] [(] [3] [Ans] [x^2] [+] [Ans] [+] [6] [)] [(] [Ans] [+] [7] [)] [=]

Máy hiện 3023016044, bạn tách chúng thành từng cụm ba chữ số 3,023,016,044 (nhớ là từ tách bên phải sang nghe), và đó chính là các hệ số cần tìm 3,23,16,44. Ta viết

$$3x^3+23x^2+16x+44$$

Thế là xong! Thử lại bằng cách bấm qua trái, bấm thêm [−] [(] [3] [Ans] [x^3] [+] [2] [3] [Ans] [x^2] [+] [1] [6] [Ans] [+] [4] [4] [)] [=], máy báo bằng 0, phép tính mình đúng.

Xin giải thích một chút về quy trình bấm phím: bạn bấm 1000 [=] cho mọi bài toán,khi nhập phép tính thay x bằng [Ans]

Về sáng kiến này tôi giải thích (không phải chứng minh) như sau:

Giả sử ta có các phép toán (cộng, trừ và nhân) các đa thức với hệ số nguyên có bậc không quá 3 để ra một đa thức bậc 3. Khi đó kết quả

của phép toán có dạng:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ta có: $f(1000) = 10^9 a + 10^6 b + 10^3 c + d$
Thực hiện trên MTCT như trên, ta có:

$$3023016044 = 10^9 \times \mathbf{3} + 10^6 \times \mathbf{23} + 10^3 \times \mathbf{16} + \mathbf{14}$$

Trong ví dụ trên, quan sát thấy các hệ số đều dương, tác giả đồng nhất $a \equiv 3, b \equiv 23, c \equiv 16, d \equiv 14$. Tuy nhiên - như sẽ thấy ở dưới - vấn đề không phải lúc nào cũng đơn giản như vậy.

Ưu điểm của cách làm thì đã thấy rõ. Về khuyết điểm:

1. Chỉ áp dụng được khi trong kết quả a, b, c, d là các số có tối đa 3 chữ số và *luôn luôn phải thử lại* vì kết quả ban đầu *không luôn luôn đúng*.

2. **Khi thử lại thấy sai** (*thông thường* là khi thấy $f(1000)$ chứa những bộ có ba chữ số quá lớn, trong khi *thực tế là các số nhỏ hơn nhiều*), tác giả đưa ra cách khắc phục bằng cách trừ số có 3 chữ số đó cho 1000, sau đó cộng 1 vào số của bộ ba đứng trước. Tất nhiên trước khi kết xuất ra kết quả, vẫn phải thử lại.

Ví dụ 2: $(5x-3)(x^2+6x-7)+10x-21$
Thực hiện như trên, máy hiện 5026957000, bạn vẫn tách như trên 5,026,957,000.

Từ phải sang, nhóm 000, không có vấn đề gì, lấy hệ số là 0.

Lần này phải cẩn thận hơn! Ở nhóm 957 ta hiểu là -43 (vì 957-1000=-43) chứ không phải 957! Vì sao ư? Đơn giản là vì 957 là số quá lớn không thể là hệ số của phép nhân này được và ta phải lấy nhóm số đó trừ đi 1000.

Dấu hiệu cần chú ý tiếp theo là nhóm 026, nhóm này đứng sau nó là nhóm 957 (nhóm có hệ số âm), vậy ta lấy 26+1=27, hiểu đơn giản đằng sau nhóm có hệ số âm thì phải nhớ 1.
Vậy kết quả là: $5x^3 + 27x^2 - 43x$

Tóm lại, với qui mô của một bài thi đại học môn toán, các số trong các phép toán đa thức trên không có 4 chữ số. Do đó phương pháp của HS Trần Ngọc Ánh Phương tỏ ra khá hữu ích cho các bạn đồng học và cho các học sinh thế hệ sau.
Để kết thúc phần này và để thấy rõ ưu điểm của phương pháp mà bạn Phương gọi là "Phương pháp CALC **1000**", các bạn xem bài toán sau:

1. Khai triển thành đa thức bậc 3:

$$P(x) = (19x + 18)(17x + 16) + (15x^2 + 14x + 13)(12x + 11)$$

1000 = (1 9 Ans = + 1 8) (1 7 Ans
+ 1 6) + (1 5 Ans x^2 + 1 4 Ans +)
1 3 (1 2 Ans + 1 1) = 180|656|920|431

Sau khi thử xong, ta có:

$P(x) = (19x + 18)(17x + 16) + (15x^2 + 14x + 13)(12x + 11) =$

$= 180x^3 + 56x^2 + 920x + 431$

2. Khai triển thành đa thức bậc 3:

$$P(x) = (19x + 18)(17x + 16) - (15x^2 + 14x + 13)(12x + 11)$$

1000 = (1 9 Ans = + 1 8) (1 7 Ans
+ 1 6) − (1 5 Ans x^2 + 1 4 Ans +)

[1] [3] [(] [1] [2] [Ans] [+] [1] [1] [)] [=] −180|009|699|855

Ta xét số: 180|009|699|855

180	009	699	855	
180	009	700	-145	
180	010	-300	-145	
−180	−10	+300	+145	(đổi dấu)

Cách thức thực hiện là *"thử thấy sai, trừ **1000**, cộng **1** vào bên trái. "*

Cuối cùng, sau khi thử thấy đúng, ta viết

$P(x) = (19x+18)(17x+16) - (15x^2+14x+13)(12x+11) =$

$= -180x^3 - 10x^2 + 300x + 145$

Sáng kiến 2: LẬP SƠ ĐỒ HORNER TRÊN MÁY TÍNH

Thông thường để thực hiện phép chia đa thức người ta thường dùng cách chia được học năm lớp 8. Nếu phép chia là chia hết ta có thể dùng phương pháp chia bằng sơ đồ Horner. Nhưng với phương pháp này (Lập sơ đồ Horner trên MTCT) ta không cần dùng đến sơ đồ Horner nữa. Nếu bạn hiểu cách nhân đa thức rồi thì chỉ cần thay phép nhân bằng phép chia là được.
Ví dụ : Biết đa thức $2x^3 - 3x^2 - 16x + 21$ có một nghiệm $x = 3$. Hãy viết đa thức dưới dạng $(x-3)(ax^2+bx+c)$.

Thực hiện:
1000 [=] [÷] [2] [Ans] [x^3] [−] [3] [Ans] [x^2] [−] [1] [6] [Ans] [+] [2] [1] [▼] [Ans] [−] [3] [=] 2|002|993
Lấy $993 - 1000 = -7$.
Vậy $2x^3 - 3x^2 - 16x + 21 = (x-3)(2x^2 + 3x - 7)$

Đây là một sáng kiến của học sinh trong quá trình sử dụng MTCT. Tuy nhiên với máy tính **CASIO** FX 570VN Plus, với tính năng lưu nghiệm, ta có thể thực hiện như sau:

[MODE] [5] [4] [2] [=] [(−)] [3] [=] [(−)] [1] [6] [=] [2] [1] [=]

Máy tính sẽ xuất ra một nghiệm nguyên là 3 và hai nghiệm thập phân. Lưu hai nghiệm thập phân vào [A] và [B]. Khi đó:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 16x + 21 &= 2(x-3)(x^2 - (\mathbf{A}+\mathbf{B})x + \mathbf{AB}) \\ &= 2(x-3)\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right) \\ &= (x-3)\left(2x^2 + 3x - 7\right) \end{aligned}$$

Lưu ý: Với hai ví dụ cuối cùng nêu trong sáng kiến 1, nếu các bạn không muốn thử đi thử lại nhiều lần, dùng MTCT ta có thể thực hiện như sau:

① Nhập biểu thức lên màn hình trong một cặp dấu đóng mở ngoặc đơn.

② [CALC] [0] [=] [SHIFT] [RCL] **(STO)** [sin] **(D)**

③ CALC 1 = SHIFT RCL (STO) tan (F)

④ CALC (–) 1 = SHIFT RCL (STO) cos (E)

⑤ ▲ nhiều lần cho hiện lên biểu thức sau đó bấm ◀ để đưa con trỏ lên và bấm liên hoàn ▶ SHIFT DEL ▯ SHIFT ∫ (d/dx ▮) ◀ ◀ ◀ 0 = SHIFT RCL **(STO)** hyp **(C)** để thực hiện việc tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$.

⑥ ▭ F + E ▼ 2 – D = SHIFT RCL **(STO)** °'" **(B)**

⑦ F – D – C – B = SHIFT RCL **(STO)** (–) **(A)**

Kết quả: $Ax^3 + Bx^2 + Cx + d$

Cách thức này thực hiện nhiều bước và lâu hơn **sáng kiến 1** *tuy không lâu hơn bao nhiêu*, nhưng không cần phải thử đi thử lại và do đó độ an toàn cao.

Ví dụ: $(3x^3 + 9x)(12x - 6) - (2x - 9)^2(9x^2 + 2)$

nếu dùng " CALC **1000**" ta thực hiện như sau:

CALC 1000

(3 X x^3 + 9 X) (1 2 X – 6)
– (2 X – 9) x^2 (9 X x^2 + 2)
CALC **1000** = **305|371|017|838**

Nếu chọn $P(x) = 305x^3 + 371x^2 + 17x + 838$

thử lại thấy sai. Lấy $838 - 1000 = -162$,

nếu chọn $P(x) = 305x^3 + 371x^2 + 18x - 162$
thử lại vẫn thấy sai. Lấy $371 - 1000 = -629$,
nếu chọn $P(x) = 306x^3 - 629x^2 + 18x - 162$
thử lại thấy đúng.
Vậy $P(x) = 306x^3 - 629x^2 + 18x - 162$

Như các bạn thấy, mỗi lần thấy sai ta đều phải điều chỉnh "trừ 1000". Vấn đề là lấy số nào "trừ 1000" vẫn mang yếu tố may rủi. ***Tuy nhiên như đã nói ở trên, với qui mô của một bài thi Đại học, phương pháp của HS Trần Ngọc Ánh Phương là giải pháp tốt nhất.***

Cách khác:

Nhập biểu thức $(3x^3 + 9x)(12x - 6) - (2x - 9)^2(9x^2 + 2)$ lên màn hình trong một cặp dấu đóng mở ngoặc đơn và nhấn [=]

Cách khác:

[CALC] [0] [=] **−162 (STO)(D)**

[CALC] [1] [=] −467 **(STO)(F)**

[CALC] [(−)] [1] [=] −1115 **(STO)(E)**

[◀] [▶] [SHIFT] [DEL] [SHIFT] [∫] ($\frac{d}{dx}$■) [◀] [◀] [◀] [0] [=] **18 (STO)(C)**

[▭] [F] [+] [E] [▼] [2] [−] [D] [=] **−629 (STO)(B)**

[F] [−] [D] [−] [C] [−] [B] [=] **306 (STO)(A)**

Vậy $P(x) = 306x^3 - 629x^2 + 18x - 162$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đề thi và Đáp án HSG máy tính cầm tay của Bộ giáo dục và Đào tạo các năm 2003-2014 môn Toán dành cho bậc THPT.

[2] Đề thi và Đáp án HSG máy tính cầm tay bậc THPT của Sở Giáo dục và Đào tạo các tỉnh phía Nam năm 2003-2013.

[3] Đề thi và Đáp án chọn đội tuyển HSG máy tính cầm tay bậc THCS của Sở Giáo dục và Đào tạo TP HCM các năm 2003-2014.

[4] Hướng dẫn sử dụng và giải toán trên máy tính Casio FX-500MS. *Nguyễn Văn Trang-Nguyễn Trường Chấng- Nguyễn Hữu Thảo-Nguyễn Thế Thạch.* NXB Giáo dục Việt Nam-2013

[5] Tuyển tập các đề thi Giải toán trên máy tính THCS 2003-2010. *Trần Đỗ Minh Châu - Tạ Duy Phượng - Nguyễn Khắc Toàn.* NXB Giáo dục Việt Nam - 2013

[6] http://kinhnghiemhoctap.blogspot.com/p/nang-cao.html. Trần Ngọc Ánh Phương.

[7] Giải toán trên máy vi tính với Maple. Nguyễn Văn Quí -Nguyễn Tiến Dũng - Nguyễn Việt Hà. NXB Đà Nẵng 2001.

MỤC LỤC